

物理學導論講義——Fluid

讲义编写：王喆睿

校对：高梓轩

公式整理：刘天励

2017年11月16日

Contents

1	前言	2
2	何谓流体?	2
2.1	定义	2
2.2	连续体与刚体	2
2.3	流体与固体	2
2.4	气体与液体	3
3	矢量分析	3
3.1	标量场和矢量场	3
3.2	算符 ∇	3
3.3	梯度、散度与旋度	3
4	流体静力学	4
4.1	流体压强	4
4.1.1	重力场下的压强	5
4.1.2	其他场下的压强	5
4.2	浮力	6
4.3	表面张力	6
5	流体动力学	8
5.1	两种描述方法——欧拉表述与拉格朗日表述	8
5.2	理想流体的运动	9
5.2.1	理想流体	9
5.2.2	伯努利原理	9
5.2.3	实例	9
5.3	黏性流体的流动	10
5.3.1	黏滞定律	10
5.3.2	层流与湍流	10
5.3.3	雷诺数	10
5.3.4	泊肃叶方程	11
6	超流体	11
7	结语	12

1 前言

在前面的物理学学习中，研究物体的运动时，我们大多都是在研究刚体的运动，例如小球的碰撞、空竹的转动等问题。我们现在都已经对这些刚体的性质与规律有所了解，而对于自然界中另一种常见的物体——流体，却了解甚少。那么今天，就让这份讲义以一个“物理”的方式，带领大家直观形象地去感受流体的魅力。

2 何谓流体？

2.1 定义

流体，是与固体相对应的一种物体形态，是液体和气体的总称。流体没有固定的形状，它会随着容器的不同所处的场的不同而不断改变着它的形状。

2.2 连续体与刚体

刚体，顾名思义，是视为不会发生形变的物体。如果用质点组的观点来进行理解，就是其内部质点之间不发生相对运动。这样一个优美的假设使得我们在研究刚体运动规律时，只需关注六个自由度——平动三个，转动三个，而不必去分析刚体内部的运动性质。然而事实上，刚体这个模型在处理可形变物体问题时非常僵硬。所以，提出连续体的概念来解决非刚体问题是很有必要的。

连续体，即组成物体的各个质点之间可以进行相对运动的物体，包括弹性体和流体，而流体又分为液体和气体。其中二者最大的不同在于液体体积在压力以及温度不变时体积基本固定不变，气体则很容易压缩或扩散。宏观地看，连续体可以有形变或非均匀流动。各个质点间也没有了像刚体那样的约束，并由此产生了更多的性质。正是流体的这种多自由度、少约束条件的性质使得流体问题变成了一个 NP-hard 的问题，许多实际情况下是不可解的，也正是因此流体动力学问题的统一方程组至今悬而未解。

2.3 流体与固体

众所周知，固体与流体的区别就在于各个点相对运动范围天差地别，宏观上的现就是流体的形状能够很容易的改变。如果我们把物体比作一个内有学生的教室，那么固体可以看做学生们在认真听课，大家都坐在自己的位置上，几乎没有相对运动的产生，但实际上靠近观察有些人在开黑，有些在写作业。这显然是 WeiKu 老师上课时教室内的常态。而流体可以看做课间休息，学生们可以任意在教室内走动。有趣的是有些物质由于剪切增稠的性质使得它兼具了固体和流体的性质。比如淀粉溶液，如果我们瞬间给它一个较大冲量，会发现其会瞬间具有刚体的某些性质，就像喧闹的教室进来了教导主任一样。很多防弹衣便利用这种性质进行保护士兵。

在日常生活中，我们可以观察到，液体的流动可以看成液体各层之间的相对滑移。流动性差到一定程度，可以理解成物体各层之间可以长时间保持不滑移，有平行于滑移方向力的作用。黏稠到可以长时间地维持这样一种力的物质，我们就不再称其为液体了，像冷

冻的沥青。因而，液体区别于固体的一个显著的性质是它在静态中不可能维持这种平行于滑移方向的力。这种性质就是流动性。

2.4 气体与液体

在宏观世界，一方面，气体分子能够任意地移动，导致了它的易压缩性。另一方面，液体形状相对更稳定，而且基本不能被压缩。这个区别源于它们分子间结构的区别，以及它们之间作用力的区别。气体分子之间的距离极远，只有很弱的分子间引力作用。所以他们能自由的运动。另一方面，液体有中等强度的分子间作用力，部分有序的分子排列，但是也会导致研究他们需要经典统计和量子统计并用。

3 矢量分析

3.1 标量场和矢量场

可以说，可能存在的最简单的场就是标量场，它指每一个点仅仅由单一的数值——一个标量标志的场，比如，温度场、密度场。考虑这些标量场的一种办法是去设想一些“等值面”，很简单的例子，如等温线，由于大家一定都了解所以在此不再赘述。还有一种场——矢量场，就是在空间的每一个点给出一个矢量，这些矢量随着空间变化而变化。举个例子，流体中各个点的流向就给出了一个矢量场。

3.2 算符 ∇

我们定义 ∇ 作为一个矢量算符：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1)$$

单独的 ∇ 并没有意义，我们只需要记住 ∇ 是一个算符就可以了。

3.3 梯度、散度与旋度

首先我们给出它们的数学含义：

对于一个标量场 ϕ ，定义它的梯度为：

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = \nabla\phi \quad (2)$$

可见标量场的梯度是一个矢量场。

对于一个矢量场 \mathbf{A} ，定义它的散度为：

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3)$$

可见矢量场的散度是一个标量场。

对于一个矢量场 \mathbf{A} ，定义它的旋度为：

$$\begin{aligned}
 \text{curl}\mathbf{A} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \\
 &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \frac{\partial}{\partial x} & A_x \\ \mathbf{e}_y & \frac{\partial}{\partial y} & A_y \\ \mathbf{e}_z & \frac{\partial}{\partial z} & A_z \end{vmatrix} \\
 &= \nabla \times \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{4}$$

可见矢量场的旋度是一个矢量场。

后面我们会看到这种运算定义的优越性。

4 流体静力学

4.1 流体压强

对于固体，每个点都可以承受住一定的力，我们经常会用“力的作用点”这一概念来分析问题，而对于流体，这一性质不复存在。因为在处理流体问题时，不能取一个个离散的质点，而是要取有质量的体积元，质元。所以，下面所讨论的力不再像刚体受力分析中力是作用在一个固定的点或可抽象为作用在一个固定的点上，而是要看成作用在质元的表面上，即分析作用在单位面积上的力。这种变化最显著的体现在于单位制。原先我们的力的单位是牛顿，而接下来我们所说的压强的单位就变成了牛顿每平方米。

流体有一个很重要的性质，它可以传递压强，这也就是帕斯卡原理（作用在不可压缩静止的密闭流体上的压强可以等值地传到各处去）。流体在每个内部的点压强的大小不随方向改变，我们可以给出一个很简单的证明：

假设存在一个场，单位体积流体在其中所受到的力为 $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ 。

$$\frac{1}{2}p_x dydz - p_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) dS_n = \frac{1}{6}f_x dx dz dy \tag{5}$$

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) dS_n = \frac{1}{2}dydz \tag{6}$$

由以上两式，得到，

$$p_x - p_n = \frac{1}{3}f_x dx \tag{7}$$

同理可得，

$$p_y - p_n = \frac{1}{3}f_y dy \tag{8}$$

$$p_z - p_n = \frac{1}{3}f_z dz \tag{9}$$

当 $\lim dx \rightarrow 0, \lim dy \rightarrow 0, \lim dz \rightarrow 0$ 时, 也就是说我们所考虑的变成了一个点时, 我们就有:

$$p_x = p_y = p_z = p_n \quad (10)$$

这就证明了帕斯卡原理。

4.1.1 重力场下的压强

关于压强的分布, 相信读者最熟悉的便是重力场中的压强分布情况, 即 $p = \rho gh$ 。下面让我们推导一下这个看起来平凡的结论:

取一个小水柱, 长 dz , 横截面积为 ΔS , 由受力平衡得到,

$$\begin{aligned} (p + dp)\Delta S - p\Delta S &= \rho g \Delta S dz \\ dp &= \rho g dz \\ \Rightarrow p - p_0 &= \int_0^h \rho g dz = \rho gh \end{aligned} \quad (11)$$

4.1.2 其他场下的压强

那么其他场下的压强又是怎么分布的呢? 像在电场, 惯性离心力所形成的场, 或者许多场的叠加中, 公式 $p = \rho gh$ 显然就不适用了。那么现在我们考虑流体中的一个小立方体, 作用于它上面的来自压强的合力应该是怎样的呢?

考虑 x 方向上两个相对的面, x 处的面受力为 $p(x)\Delta y\Delta z$ 和 $x + \Delta x$ 处的面受力为 $-p(x + \Delta x)\Delta y\Delta z$, 所以 x 方向上的合力就是: $(-\partial p/\partial x)\Delta y\Delta z$ 。同样地思考另外两个方向, 很容易得到, 单位体积的压力就为 $-\nabla p$ 。

在这种场中, 我们设单位质量的势能为 ϕ , 那么单位质量的受力就是 $-\nabla\phi$ 。

对于平衡情况来说, 合力为零, 就有:

$$-\nabla p - \rho \nabla \phi = 0 \quad (12)$$

$$\Rightarrow \nabla p + \rho \nabla \phi = 0 \quad (13)$$

这就是静态流体压强分布的一般形式。接下来我们进行讨论:

- 当 ρ 是一个常数时, 等式的两部分都是纯梯度, 就有,

$$p + \rho \phi = const \quad (14)$$

- 当 ρ 是一个变量时, 方程很难有静态条件下的解。但是当 ρ 仅为 p 的函数时, 就可能存在解析解了。

请同学们课后自己求解一下离心力场的压强分布和恒温近地大气压强分布。

4.2 浮力

阿基米德原理指出物体所受的浮力等于它所排开的液体的重力。

$$F = -mg \quad (15)$$

对于一个规则的柱状物体很容易证明，

$$\begin{aligned} dF &= \Delta p dS \\ &= \rho h g dS \\ \Rightarrow F &= \rho g V \\ &= mg \end{aligned} \quad (16)$$

而对于更一般的不规则物体，有：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \oint_S p d\mathbf{S} = - \iiint \nabla p dV \\ &= \rho \iiint \nabla \phi dV = -mg \end{aligned} \quad (17)$$

阿基米德原理很简单，但我们对于这个原理更需要学习的不是定理本身，更不是应用计算，而是原理发现过程背后所蕴含的物理学思想方法。在阿基米德发现该原理的时候，有关浮力，压强的概念并非如现在玉宇澄清，反而一片混沌。在所知有限的情况下，阿基米德首先做出了一个假设：流体内同一水平面上下压强相等，和一个限定：浮体的下表面与流体接触，从而详细阐述总结了阿基米德原理。这种面对未知采用假设限定的方法在探究物理学难题时意义非凡。

4.3 表面张力

液体中每个分子都以范德华力与周围的分子相互吸引，处于内部的分子，在各个方向上所受到的力是均衡的，因而其合外力为零，处于受力的平衡态。而处在液体表面的分子，只受到液体内部和表面分子的作用力，如果液体表面的另一侧是空气或其他液体其中的分子当然也会受到表面的另一侧其他物质分子的作用力。但由于另一侧分子的引力要小，所以表面的分子受到的合力指向液体内部，都有向液体内部收缩的趋势。像这样，由于液体表面分子受力不均衡而产生的力在宏观表现出的合力就是**表面张力**。然而，表面分子一旦向液体内部运动，由于其与内部近邻的分子之间的距离减小，两者之间的静电斥力又会增大，表面分子就处在力学平衡状态。

以水为例，水面上的水分子没有完整的周围，它们只能和水面下的水分子强烈吸引，而与空气吸引很弱，结果在水与空气的交界上形成了一股指向内部的合力即上面提到的表面张力。表面张力指向内部，总是倾向于收缩液体，更准确地说，是减小液体的表面积，荷叶上的露珠因此总是聚成球形。不同液体分子间的作用力强度不同，所以表面张力也不同。

下面我们来定量的描述表面张力。实验表明，表面张力的大小与液体的种类、液面两侧的物质的种类、环境温度等因素有关。液面上一段长度为 L 的线段所受到的表面张力的大小大致与作用线的长度成正比，比例系数为 σ ，即为**表面张力系数**。

$$F = \sigma L \quad (18)$$

力的方向与作用线垂直。

我们熟知的毛细现象就可以用表面张力来解释，设接触角为 θ ，细管半径为 r ，那么毛细管中吸起的水柱的高度就为：

$$2\pi r\sigma \cos\theta = \rho gh \quad (19)$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\pi\sigma r \cos\theta}{\rho gh} \quad (20)$$

表面张力都是沿着表面的切向的，因而，平直的液面不会由于表面张力产生额外的压强。但是，若液面是弯曲的，则会产生指向曲率中心侧的压强。那么这个压强是如何量化的呢？

拉普拉斯变换：对于一个面元，取正交的两个方向，在这两个方向上面元的曲率半径为 R_1, R_2 ，则面元两侧的压强差（表面张力产生的附加压强）就为：

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (21)$$

下面给出证明：

如图，记一对过法线的正交平面与小曲面相交形成的圆弧分别为 $\widehat{P_1MP_2}$ 和 $\widehat{Q_1MQ_2}$ ，这两段圆弧的中心都在法线的反向延长线上，分别记为 O_1 和 O_2 。设圆弧 $\widehat{P_1MP_2}$ 和 $\widehat{Q_1MQ_2}$ 对应的圆心角分别为 2θ 和 2ϕ 。由于我们取的曲面很小，所以：

$$\sin\theta \approx \theta \quad (22)$$

$$\sin\phi \approx \phi \quad (23)$$

$$\widehat{BC} = \widehat{AD} = \widehat{Q_1Q_2} = 2R_2\phi \quad (24)$$

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{P_1P_2} = 2R_1\theta \quad (25)$$

$$S_{ABCD} = \widehat{Q_1Q_2} \times \widehat{P_1P_2} = 4R_1R_2\theta\phi \quad (26)$$

BC 段和 AD 段表面张力引起的沿法线方向的分力为：

$$\Delta f_1 + \Delta f'_1 = 2\sigma\widehat{Q_1Q_2}\theta = 4\sigma R_2\theta\phi \quad (27)$$

同理， AB 段和 CD 段表面张力引起的沿法线方向的分力为：

$$\Delta f_2 + \Delta f'_2 = 2\sigma\widehat{P_1P_2}\phi = 4\sigma R_1\theta\phi \quad (28)$$

因此表面张力引起的 M 点的压强差为：

$$\Delta p = \frac{\Delta f_1 + \Delta f'_1 + \Delta f_2 + \Delta f'_2}{S_{ABCD}} \quad (29)$$

$$= \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (30)$$

对于一个球液面， $R_1 = R_2 = R$ ，此时有：

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (31)$$

举个简单的例子，我们小时候玩的吹泡泡，肥皂泡形成的一个液体球膜由于表面张力的作用就会使其内外压强不等，由于肥皂泡有内外两个面，所以内外压强差就等于二倍的上述的 Δp 。即：

$$p_{\text{内}} - p_{\text{外}} = \frac{4\sigma}{R} \quad (32)$$

5 流体动力学

细心的同学可能已经发现，我们到现在提出的性质都是在流体不动时提出的。而流体不流何谈流体。但是从静到动显然是一个质变的过程，那些在流动中看起来非常优美的性质可能在静止中根本无法体现出来，所以动态研究在力学中十分必要。

5.1 两种描述方法——欧拉表述与拉格朗日表述

处理连续体问题时我们不能再把连续体看做一个个离散的质点，而是要取有质量的体积元。这是因为流体不同于固体，固体的每一个点都可以承受外力，但流体不可以。也就是说之前研究刚体的思想方法在研究流体时可能不太适用。实际上刚体是一个不自洽的模型，这里不再加以赘述。目前的研究流体的方法大致有二，拉格朗日法和欧拉法。根据定义来看，拉格朗日法是指将流体分成许多无穷小的微元，求出它们各自的运动轨迹，称作迹线，用质点组动力学的方法来讨论流体的运动；欧拉法则把注意力集中到各空间点，观察流体微元经过每个空间点的流速 \mathbf{v} ，寻求它的空间分布和随时间的演化规律。拉格朗日法可以通过研究流体微元而对其携带物有一个较好的追踪效果。而在研究流体在一定空间区域内性质的分布时，使用欧拉法则十分简便。

下面是两种表述的数学表达：

- 拉格朗日表述：

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0, t) \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ \mathbf{a} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{33}$$

- 欧拉表述：

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)\tag{34}$$

欧拉表述中，加速度不再是简单的对速度求时间的导数了，

$$\begin{aligned}d\mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\end{aligned}\tag{35}$$

这样解释或许有一些晦涩，我们依旧用浅显的例子进行类比。拉格朗日法就像老师点名签到，关注的是每个学生的出勤状态，而不是总共出勤了多少人，注意力放在个体上；欧拉法则像小组学习室管理员，关注的是每个房间里有多少人，而不是谁在里面，注意力放在一个区域内。两种研究方法都有各自的优越性。二者实质性等价，并无孰优孰劣之分。

我们接下来的研究主要应用欧拉法。而提及欧拉法便必须要清楚如下两个概念：

- **流线**: 流体中始终与速度相切的曲线就是流线。流线的切线方向与速度方向平行, 流线不会相交。
- **流管**: 在运动的流体中做一闭合曲线, 通过该闭合曲线上各点的流线围成的细管就是流管。很容易想出, 流管壁是不会有流体进出的。这样, 我们便有了一整套较为完备的研究流体运动的方法。

5.2 理想流体的运动

5.2.1 理想流体

我们在经典力学中, 研究物体运动, 提出了理想刚体的概念; 在天体力学中, 研究星体运动, 提出了理想轨道的模型; 在热力学中, 我们有理想气体的提出。因此我们在这里提出**理想流体**的概念。理想, 就是尽可能朝着简化我们思考问题方式所做的设想。我们刚刚在讨论流体静力学问题时遇到了两个变量: 压强 p 和密度 ρ , 而他们的变化显然并不是相互独立的。所以我们第一个假设就是流体密度为一个常量, 宏观解释就是流体不可压缩。此外理想流体应该是一个非耗散的、封闭的系统, 它没有摩擦力也就是没有黏滞力, 运动过程中不产生热量, 机械能守恒。

5.2.2 伯努利原理

在进入正题之前, 我们先介绍一下定常流动:

- **定常流动**: 所谓定常流动指的就是在流体中任何地方的速度不会随时间变化的流动。在任何地点的流体总是被新的流体以完全相同的方式所替代。可见定常流动的速度场是一个静止的矢量场。

考虑流管中的某一段流体在 Δt 时间内运动过程, 对于理想流体, 质量守恒和能量守恒的结论是平凡的, 所以我们可得:

$$\Delta M = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t \quad (36)$$

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \Delta M \left(\phi_2 + \frac{1}{2} v_2^2 - \phi_1 - \frac{1}{2} v_1^2 \right) \quad (37)$$

联立上面两个式子, 可得,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = const \quad (38)$$

这就是**伯努利方程**。

5.2.3 实例

并行的船只之所以会相撞就是由于伯努利原理的作用, 两船中间的水速快, 两侧慢, 因此两侧的压强就大于两船中间的压强, 将船向中间“推”, 使得两船靠的更近。靠的越近, 就会导致中间水速更快, 中间和两侧的水速差越大, “推力”越大, 形成一个正反馈效应。因此许多时候当人们发现船要相撞时已经为时已晚了。

同样地, 飞机的升力、足球中的世界波、乒乓球中的弧线球等等都是伯努利原理的例子。

5.3 黏性流体的流动

可以说流体最大的特点就是流动，但不同物体流动时所表现出来的状态大相径庭。水可以流动，油也可以流动，蜂蜜也可以流动……然而这些物体在流动时粘滞的感觉完全不同，我们可以称这种感觉为流动性。那么可以说水，油，蜂蜜三种物体，流动性最好的是水，其次是油，蜂蜜最次。然而仅仅用直观感觉来判断流动性说服力是不太充分的，我们需要一种更为理性的判断方法。

5.3.1 黏滞定律

真实流动时，相互接触的部位之间若出现相对滑动，就会出现阻碍相对滑动的内摩擦力，即黏力。从微观上来看，对于气体，气体分子既有随气流的宏观运动，又有不规则的热运动，不同流速层的气体分子很容易因热运动相互碰撞形成流速层的动量交换，即黏滞现象：对于液体，这种动量交换主要是通过分子团在相对滑动中因形变互相施力来实现的。

为了定量分析，我们假设流体沿图中 z 轴分层流动，即有着 $v = v(z)$ 的速度分布，去一个垂直于 z 轴的小面元 dS ，面元上下方流体相互有一对作用力 df ，实验发现，对于大多数流体都有：

$$df \propto dS \quad (39)$$

$$df \propto \frac{dv}{dz} \quad (40)$$

引入比例系数 η ，

$$df = \eta \frac{dv}{dz} dS \quad (41)$$

这就是黏性定律，比例系数 η 称为流体的黏度，也就是黏性系数。

5.3.2 层流与湍流

1880 年，英国实验流体力学家雷诺用在长管里的均匀流动来研究流体产生不同流动形式的过程。细管内自带有色液体，从一端流出，控制水的流速观察现象。实验中先令容器中水缓缓流动，可以看到，有色液体流动时成线状，我们给这种流动方式起一个很形象的名字——层流。但随着水流速增大，会出现有色液体失去了自己的信仰，开始随波逐流与周围流体互相混杂的情形，甚至还会产生流动的涡状结构，我们称之为湍流。

更严密地说，由于黏性速度产生了分层变化的流动称为层流，但当速度增大时，流体的速度便会出现垂直于管轴的分量，开始混乱地流动，我们称之为湍流。

5.3.3 雷诺数

那么，根据数学中分段函数的思想，有没有这样一个量，流体的特征值大于它时是一种流动方式；小于它时是另一种流动方式呢？答案是，很遗憾，没有。实际流体的复杂程度远远超出我们的想象，不然就不会专门成立一门学科用于计算流体力学问题了。至今我

们还是没有找到一种判定方法严格区分不同种流动方式的界限。但是我们可以借助一个量，定性地刻画这一现象。这个量便是**雷诺数**。

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (42)$$

其中 D 是物体的尺度大小。从雷诺数的定义上看，它与流体平均流速，流体密度均成正比，而且没有单位。雷诺数的物理含义还可以理解成为作用于流体微团的惯性力与黏性力之比。不难看出，雷诺数越大就越容易出现湍流，越小则流体运动越趋向于层流的形式。当雷诺数小于 1 时，我们称其为**小雷诺数**，此时流体服从我们之前推出的一些优美性质，流体是层流。当雷诺数的数量级达到 5 时，我们称其为**大雷诺数**，很多小雷诺数下得到的性质无法成立，流体形成湍流。

可以说雷诺数是流体动力学中一个非常重要的物理量，根据它我们可以大致知道流体的流动特点，这对我们是很有帮助的。比如飞机的风洞实验中，为了减少成本，我们不会做一个一比一的模型飞机来模拟飞行，但是我们要得到相似的飞行状况，就要保证雷诺数大致相同，因此我们需要增加风速来抵消小模型小尺度对雷诺数的干扰，这样我们就可以模拟出很真实的飞行情况了。

5.3.4 泊肃叶方程

雷诺数较小时，黏性流体在水平管道内做层流。如果流动是定常的，从中央轴到管壁会有一稳定的速度分布 $v = v(r)$ ，取长 L 的一段管道，因为是稳定平衡状态，所以，

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \quad (43)$$

由于流体是具有粘滞力，边界条件 $v(R) = 0$ ，我们有，

$$\int_0^v dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \int_R^r r dr \quad (44)$$

$$v = \frac{(p_1 - p_2)(R^2 - r^2)}{4\eta L} \quad (45)$$

管道的体积流量 Q 就是：

$$Q = \int_0^R v(r) 2\pi r dr \quad (46)$$

即，

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{8\eta L} \pi R^4 \quad (47)$$

这就是**泊肃叶方程**，利用这一结果，在低速时我们可以较为精确地测出流体的黏性系数 η 。

6 超流体

关于**超流体**，首先大家要知道，这是一个宏观的量子现象。我们都知道，粒子自旋为整数的粒子为玻色子，自旋为半整数的粒子叫做费米子。玻色子像光子，比较虚幻；费米

子比如电子，比较实在。历史上， ^4He 的超流早在上世纪 30 年代就被发现并被授予诺贝尔奖，而 ^3He 的超流现象，又过了 30 年才被找到，正是因为玻色子符合玻色爱因斯坦分布，在低能量时会发生凝聚，聚在能量最低的 one particle state. 而费米子由于泡利不相容原理，不能发生这种凝聚，故需要先发生自发的对称性破缺，先形成类似于玻色子的状态，再发生凝聚。超流体目前是一个非常前沿的研究方向，有兴趣的同学可以自己去查找额外资料去进行更深入的学习，我们在这里就不加以讨论了。

7 结语

经过本章的学习，相信同学们已经对流体有了一个很系统详实的认识。然而，这些内容对于实际流体问题来说，不过是 toy project，仅仅冰山一角。因为实际流体的问题是如此的复杂，我们很难以大道至简的思想将其归一化处理。但是，如果掌握了这些基础的流体知识，我们便可以定性地解决很多实际流体的问题。这样，流体便可以进入我们力学学习的架构，使我们建立的力学大厦更加稳固，更加系统，更加完备。当然，同学们如果有兴趣的话，可以走出本讲义的范围，去积极探索流体更深层的广袤天地。

诚然，由于编者能力有限，校对等后期工作也较为仓促，本讲义中不免有诸多疏漏和错误之处。望读者不吝指正，自当不胜感激。让我们一同学习，一同进步，一同成长。

王喆睿

2017.11 丁酉初冬