课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt.15、16、17

《新概念物理教程：力学》：第八章

第 23、24 讲：狭义相对论

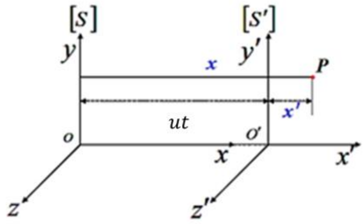
伽利略相对性原理

相对性原理是重要的基本物理原理。它涉及到不同参照系在物理观测中的地位。在进行物理观测的时候总是要在某一参照系中进行的。对于不同的人，或者不同的实验过程会使用不同的参照系。那么在这些不同的参照系中所观测的物理过程有什么样的异同，对于建立和理解物理规律有着重大的影响。在伽利略的著作中有如下的描述：

> 当你在密闭的运动着的船舱里观察力学过程时，"只要运动是匀速的，决不忽左忽右摆动，你将发现，所有上述现象丝毫没有变化，你也无法从其中任何一个现象来 确定，船是在运动还是停着不动。即使船运动得相当快，在跳跃时，你将和以前一样，在船底板上跳过相同的距离，你跳向船尾也不会比跳向船头来得远，虽然你跳到空中时，脚下的船底板向着你跳的相反方向移动。你把不论什么东西扔给你的同伴时，不论他是在船头还是在船尾，只要你自己站在对面，你也并不需要用更多的 力。水滴将象先前一样，垂直滴进下面的罐子，一滴也不会滴向船尾，虽然水滴在空中时，船已行使了许多拃。鱼在水中游向水碗前部所用的力，不比游向水碗后部 来得大；它们一样悠闲地游向放在水碗边缘任何地方的食饵。最后，蝴蝶和苍蝇将继续随便地到处飞行，它们也决不会向船尾集中，并不因为它们可能长时间留在空 中，脱离了船的运动，为赶上船的运动显出累的样子。如果点香冒烟，则将看到烟象一朵云一样向上升起，不向任何一边移动。所有这些一致的现象，其原因在于船的运动是船上一切事物所共有的，也是空气所共有的。"

伽利略从这些观测中总结出在密闭的船舱里观测物体的运动时并不能区分出来船是否在匀速运动。也就是说在以不同速度相对匀速运动的参照系中看到的物理

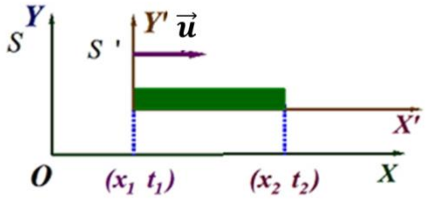
规律是相同的。这就是伽利略相对性原理。



在牛顿力学中，伽利略相对性原理是由伽利略坐标变换保证的：若在某惯性参照系中质点坐标用(x,y,z)表示，时间为t，在另一个相对于前一个参照系以速度$\vec{u}$（为方便，设速度在 x 方向上$\vec{u}=u\vec{\imath}$）匀速运动的参照系中的坐标用(x',y',z')表示，时间为t'。初始时两个坐标系重合。则在两坐标系中的坐标间的关系为

$$\begin{gathered} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{gathered}$$

在每个惯性系放一个时钟和一把尺子。在伽利略变换下钟和尺与参照系无关，与内部结构无关也与运动无关。运动长度的测量是在同一时间去测量物体的两端，于是有



$$t_1 = t_2$$

$$\Delta r = \sqrt{((x^2 - x^1)^2 + (y^2 - y^1)^2 + (z^2 - z^1)^2)}$$

如果将速度 v 的方向选为 x 方向，则

$$x_2' - x_1' = (x_2 - ut) - (x_1 - ut) = x_2 - x_1$$

$$y_2' - y_1' = y_2 - y_1$$

$$z_2' - z_1' = z_2 - z_1$$

那么

$$\Delta r' = \sqrt{((x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2)} = \Delta r$$

于是有这样的结论：同时是绝对的，即当一个观测者看到两事件"同时"发生时，另一观测者也看到这两事件"同时"发生

$$\Delta t = \Delta t'$$

空间也是绝对的，两个参照系测量出来的长度相同

$$\Delta r = \Delta r'$$

时空是分离的，也就是时间和空间无关。

伽利略相对性原理说所有惯性系是等价的，即物理定律的方程形式在所有惯性系中是相同的。由于两个惯性系的相对运动速度不随时间改变

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

这也可以写成

$$dt' = dt$$

$$d\vec{r}' = d\vec{r} - \vec{u}dt$$

而不同惯性系下物体受力是相同的。因此保证了牛顿第二定律在伽利略变换下是不变的

$$m\frac{d\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

在伽利略变换下，速度的变换关系为

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r} + \vec{u}dt}{dt} = \vec{v} + \vec{u}$$

也就是说速度满足简单叠加方式。那么在这样的变换下光速同样在不同的参照系中有不同的速度，满足简单的速度叠加方式，其大小随着参照系的不同而不同。因此如果在某个参照系中其速度为$3 \times 10^8 m/s$，在另外一个相对于此参照系有很高速度的参照系中看，其速度可以非常非常高。如 $1googlplex\ m/s = 10^{10^{100}} km/s$。

光速

光以很高的速度运行，曾经人们认为光速是无限大的，它可以瞬间运动到任何地方。1929 年，Isaac Beeckman 提出一个测量光速的方法：让一个人在远方观测大炮的火光然后用镜子反射回去。1638 年伽利略设计了类似的实验并做了测试。他希望能通过在远处观测遮挡灯笼的时间延迟来测量光速。他并没有测量出光速是否是无限大，但是确定了一点：如果光速不是无限大，那么一定是非常大。

第一个对光速的量化测量是在 1676 年由 Rømer 得到的。他观测了木星的一颗卫星木卫二的运动规律。木卫二是伽利略发现的四颗木星卫星中最靠近木星的卫星。他发现木卫二绕木星运行的周期在当地球靠近木星的过程中会比当地球离开木星的过程中观测到的要短。他认为这说明了光速是有限的。他估计光需要花 22 分钟穿越地球轨道。惠更斯由此估计以及地球轨道大小得到的光速为$220000 km/s$，这比我们现在知道的

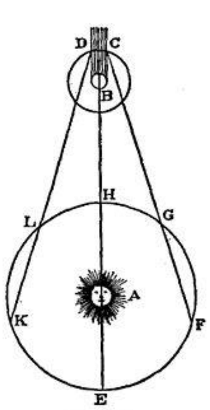


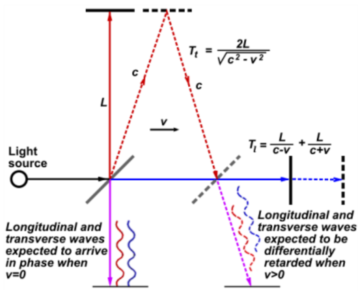
Fig. 70.

值小了 26%。之后其他人的实验表明光速应该在300000km/s左右。1860 年代，麦克斯韦统一了电磁理论。在电磁理论中预言了电磁波的存在，而且计算出的电磁波波速和光速基本一样，由此他提出光应该就是一种电磁波。

根据波动理论，波的传播需要媒介。在这样的理论中波本身不是物质，而是媒介物质运动的传播。比如我们平时听到的声音是通过空气把声源处的振动传递到我们耳朵里的。没有空气作为媒介就无法听到声音。由此自然会考虑光作为一种波，其传播的媒介是什么？考虑到光在真空中也能传播，于是人们提出了一种叫“以太”的物质，这种物质充满了整个空间，光就是以太的振动。

作为一种假想的物质，需要证据来证明以太的存在。根据波在媒介中传播的特性，人们认为以太相对于地球来说应该不是静止，因为地球作为一个参照系没有什么特殊之处，而且还是个非惯性参照系，如果以太相对于地球静止就太奇怪了。因此迈克尔逊和莫雷就设计了实验来测量地球相对于以太的运动速度。

迈克尔逊-莫雷实验是利用迈克尔逊干涉仪来测量光在走了两个相互垂直的路径之后会合时的干涉现象。干涉的结果与在两个不同路径上的路程长度以及光所花的时间有关的。假设初始时以太相对于地球在迈克尔逊干涉仪的某个镜片方向，那么在这个方向上干涉仪所感受到光来回走的速度就和垂直于此方向上的光速不同。记录下此时的干涉结果，在将干涉仪旋转 90 度，于是对于干涉仪来说，以太的运动方向不同了，应该会测量到与之前测量不同的结果。但是实验中并没有得到比实验误差更大的差异。这说明如果以太存在的话，以太就是相对于地球静止的。这个结果是很奇怪的。



狭义相对性原理和洛伦兹变换

1905 年，爱因斯坦提出：**真空中的光速与参照系无关，且光速是信息传递的最大速度**。这就是我们平时所说的光速不变。同时他又提出类似于伽利略的相对性原理：**物理规律在所有的惯性系中都是相同的**。这两条假设就是狭义相对论的基础。

狭义相对性原理表面上看与伽利略相对性原理相同，但实际上是不一样的。

与伽利略相对性原理配合的是伽利略坐标变换。在这个变换下牛顿力学的基本规律是不变的。但是在伽利略变换下电磁学的基本规律不是不变的！这一点可以由光速不变这一实验规律看出。伽利略变换并不能保证光速不变。如之前得到的速度叠加关系，在伽利略变换下，不同参照系会看到不同的光速。因此要保证狭义相对性原理这一假设成立，需要新的坐标变换关系。爱因斯坦发现这一坐标变换关系就是洛伦兹坐标变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

在这个变换关系中可以看到时间和空间之间的关系不再那么单纯了，关于时间的测量将会涉及到位置和速度。当两个参照系之间的相对运动速度$u \ll c$时，$u/c \sim 0$。此时的坐标变换近似就是伽利略坐标变换。换句话说，伽利略坐标变换就是洛伦兹坐标变换的低速近似。

事件

由于在狭义相对论中时间和空间混杂了起来，因此单独地考虑空间位置或者时间是不合适了。因此在狭义相对论中引入了一个新的概念，称为**事件**。事件是指时间-空间中的一个点，它代表一件事发生的时间和地点，表示为(t, x, y, z)。它可以看作是一个在四维时空（三维空间、一维时间）中的一个四维矢量。对于空间和时间的性质也需要做些假定。首先假定时间和空间是均匀的，这意味着在不同的时间点与不同的空间点观察到的物理规律相同。其次假定空间是各向同性的，这意味着从不同的方向看时，看到的物理规律相同。最后假定时空坐标满足欧几里得几何，也就是说假定我们所处的空间是平直的。关于空间是平直还是弯曲的区别会在后面讨论黎曼几何时讲述。另外还需要引进一个概念：观察者。观察者可以是人，也可以是能够记录事件的仪器，每个观察者与一个特定的参照系相对静止。之所以要引进观察者这个概念，是因为此时处于不同观察者以及位于

同一参照系的不同观察者对于相同事件可能观察的结果并不相同，这一点与牛顿力学有很大的不同。

在进行观察之前，还需要对时间测量做好准备。其方法是在空间的每一点放置一个与对应的参照系相对静止的钟，这些钟应该是完全一样的，而且应该同步。同一参照系的时钟同步可以通过在不同时钟之间传递光速来完成。而不同参照系间的同步只能在某一特定条件下通过同步在相同空间点处于不同参照系的时钟来完成。

狭义相对论运动学后果

在 Lorentz 变换下面，时间和长度等测量对于不同参照系，不同观察者来说都会有不同，下面讨论几种常见的 Lorentz 变换效应。在下面的讨论中都设定有两个相对在x方向上以速度u运动的惯性系S和S'。

- **动尺收缩**

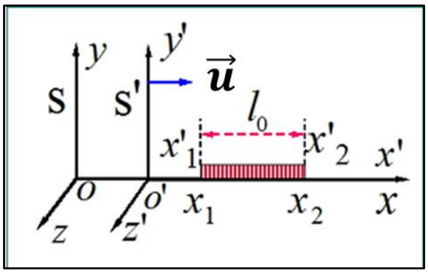
为了讨论长度的测量，将长度为l_0的尺子固定在参照系S'中，沿x方向摆放，则满足

$$l_0 = x_2' - x_1'$$

x_2'和x_1'为S'系中尺子两端的坐标。而在 S 系的观察者看来，尺子以速度u沿x轴运动

$$l = x_2 - x_1$$

其中x_2和x_1为S系中尺子两端的坐标。尺子的两端构成了两个事件。在S系中观测，其时空坐标一个是$(t, x_1, 0,0)$，另一个是$(t, x_2, 0,0)$，而在S'系中观测它们分别为$(t', x_1', 0,0)$，另一个是$(t', x_2', 0,0)$。由洛伦兹变换得到



$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta ct)$$
$$x_2' = \gamma(x_2 - \beta ct)$$

其中$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/x^2}, \beta = \frac{u}{x}$。二式相减后得到

$$l_0 = \gamma(x_2 - x_1)$$

则

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} l_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} l_0$$

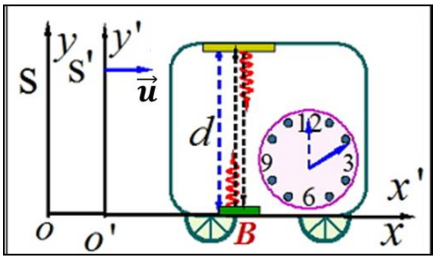
显然，$l < l_0$，l_0为尺子的原长，测量运动的尺子长度的结果比原长短。

- **动钟变慢**

为测量时间，设定以下的实验：对于两个相对在x方向上以速度u运动的惯性系S和S'，在S'系中放出一个光信号，光信号在上方高度d处反射后返回。因此在S'系中同一点发生了两个事件，发射光信号的时空坐标为$(t_1', x_1', 0,0)$，接收返回信号的时空坐标为$(t_2', x_2', 0,0)$，它们之间的关系满足

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

$$x_1' = x_2'$$



光走过的路程为$2d$，所以

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

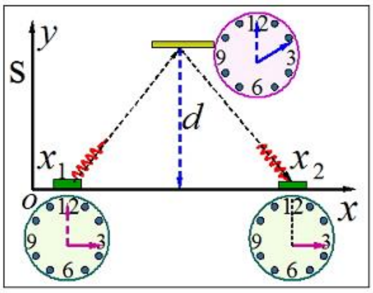
对于同样的两个事件中 S 系中的观察结果为：发射光信号的时空坐标为$(t_1, x_1, 0,0)$，接收反射信号的时空坐标为$(t_2, x_2, 0,0)$，则

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$x_2 = x_1 + u\Delta t$$

在 S 系中看到光信号并不是在垂直方向上运动，而是如图走了两条斜线。光走过的路程为$2\sqrt{\frac{u^2t^2}{4} + d^2}$，所以满足

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{\frac{u^2t^2}{4} + d^2}}{c}$$



解之得

$$c^2\Delta t^2 = u^2\Delta t^2 + 4d^2$$

即

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t'$$

由此可见运动的钟看起来走得慢一些。对于这一问题，也可以根据洛伦兹变换

$$t_1 = \gamma(t_1' + (\beta x_1')/c)$$

$$t_2 = \gamma(t_2' + (\beta x_2')/c)$$

由于$x_1' = x_2'$，所以最后得到

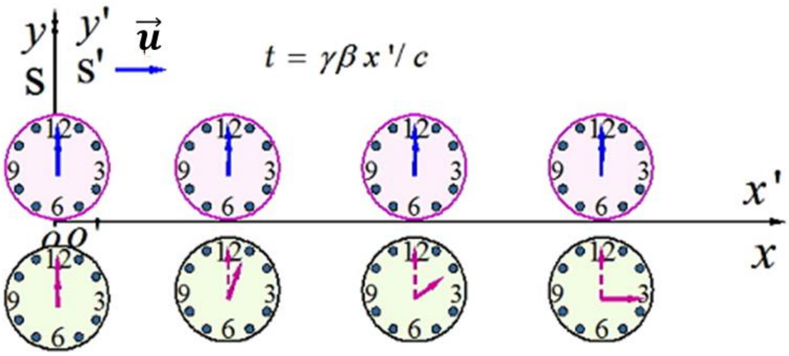
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \Delta t'$$

由于$\gamma > 1$，所以$\Delta t > \Delta t'$，也就是说，运动的钟看起来走得慢一些。

由上面的方程可知，当$t_1' = 0$时

$$t_1 = \gamma\beta x_1'/c$$

因此"此刻"在S'的观察者看到所有与S'相对静止的钟都指向 0。但此刻S'的观察者看到S系中钟不同步，在运动方向上越远的钟（x'越小）越慢。



当取$x' = 0$，$t_1' = 0$，则$t_1 = 0$，也就是说初始时，两参照系重合，位于S原点的钟和位于S'原点的钟均指向 0。而$t_2 = \gamma t_2' > t_2'$，因此随着位于S'原点的钟的运动，此钟不断与S系中的不同的钟相遇，而相遇时两个系中的钟指向不同的时间，其中S'中的钟总是指向比较小的时间，而且这种差别将越来越大。

- **同时性的相对性**

考虑一辆相对S'系静止的车厢，在车厢正中间发出光信号，信号向两边传播，光线到达车厢两边构成了两个事件。在S'系中的这两个事件是同时发生的，它们的时空坐标分别为$(t_1', x_1', 0, 0)$和$(t_1', x_2', 0, 0)$。

$$t_1' = t_2' = t'$$

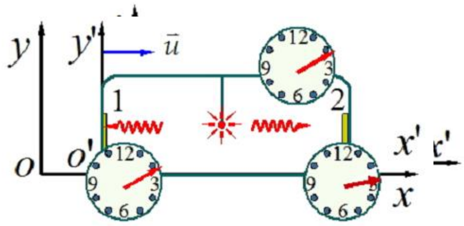
而在 S 系，这两个事件发生的时间和地点分别为

$$ct_1 = \gamma(ct' + \beta x_1')$$

$$ct_2 = \gamma(ct' + \beta x_2')$$

$$x_1 = \gamma(x_1' + ut')$$

$$x_2 = \gamma(x_2' + ut')$$



则

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')$$

当$x_2' - x_1' \neq 0$时，$\Delta t \neq 0$。这说明在一个参照系看来是同时的两个事件，在另一个参照系看来可以是不同时的。因此同时性并不是一个绝对的性质，只有相对的意义。

类时空间和类空空间，因果律

考虑任意两个事件：在S系中事件 1 的时空坐标为$(t_1, x_1, 0,0)$，事件 2 的时空坐标为$(t_2, x_2, 0,0)$。如果它们之间有因果关系，也就是说当$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$时，可以存在信息在这段时间间隔内以不超过光速的速度$v \leq c$将信息从x_1传递到x_2，则

$$x_2 = x_1 + v\Delta t$$

那么在S'系看这两个事件观测到事件 1 的时空坐标为$(t_1', x_1', 0,0)$，事件 2 的时空坐标为$(t_2', x_2', 0,0)$，它们满足变换关系

$$t_1' = \gamma(t_1 - \beta x_1/c)$$

$$t_2' = \gamma(t_2 - \beta x_2/c)$$

S'系中看到这两个事件的时间间隔为

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma(\Delta t - \beta v \Delta t/c) = \gamma \Delta t(1 - uv/c^2) > 0$$

而$uv < c^2$，因此$\Delta t' > 0$，因果关系未被破坏

再引进一个参照系S''，它相对于S以速度u沿x的负方向运动。在S'系两事件的时间间隔为

$$\Delta t' = \gamma \Delta t - \gamma \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)$$

在S''系两事件发生的时间为

$$t_1' = \gamma(t_1 + \beta x_1/c)$$

$$t_2' = \gamma(t_2 + \beta x_2/c)$$

两事件的时间间隔为

$$\Delta t' = \gamma \Delta t + \gamma \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)$$

如果$x_2 - x_1 > 0$，$\Delta t = 0$，则$\Delta t' < 0$以及$\Delta t'' > 0$。这是否意味着因果关系会被破坏？答案是否定的，注意到

$$\Delta t=\frac{x_2-x_1}{v}$$

则

$$\Delta t' \ =\gamma\Delta t\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)$$

$$\Delta t''=\gamma\Delta t\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)$$

而$uv<c^2$则保证了三个参照系看到的时间间隔是同号的

$$sign(\Delta t)=sign(\Delta t')=sign(\Delta t'')$$

因此不存在因果律矛盾。前面的貌似矛盾出现时要求$\Delta t=0$，而由前式知此时$\Delta t'=\Delta t''=0$。这在速度v'有限的条件下这意味着两个事件是在同一时刻同一空间点发生的，而这种情况在任何一个惯性系中看都是一样的，因此也不存在矛盾。如果这两个事件不是在相同的空间点发生的，则由

$$v=\frac{x_2-x_1}{\Delta t}$$

可知要求$\Delta t=0$即要求

$$v\to\infty$$

这与信息的最大传播速度为真空中的光速矛盾。

两个事件之间能够建立起因果关系，则必有

$$\Delta t\geq\frac{x_2-x_1}{v}$$

最大的信息传递速度为光速，假设这两个事件就是由光速连接的，则$v=c$

$$\Delta t'=\gamma\Delta t(1-\frac{uv}{c^2})=\gamma\Delta t(1-\frac{u}{c})$$

因此只有当S'相对于S的运动速度$u>c$ 时，因果关系才将被破坏。而当$|\vec{r}_2-\vec{r}_1|>c|t_2-t_1|$时，两事件无因果联系，因此可能出现在一惯性系看到$t_2>t_1$，而在另一惯性系中可能看到$t_2<t_1$。

对于两个事件(t_1,x_1,y_1,z_1)，(t_2,x_2,y_2,z_2)定义两个事件的**间隔**Δs为

$$(\Delta s)^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

转换到S'系中可以得到

$$\Delta x'=\gamma(\Delta x-u\Delta t)$$

$$\Delta y'=\Delta y$$

$$\Delta z'=\Delta z$$

$$c\Delta t'=\gamma(c\Delta t-\beta\Delta x)$$

则

$$
\begin{aligned}
(\Delta s')^2 &= c^2\,\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
&= \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x - u\Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\
&= \gamma^2(c^2 - u^2)\Delta t^2 - \gamma^2(2\beta c - 2u)\Delta x\Delta t - \gamma^2(1-\beta^2)\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2
\end{aligned}
$$

注意到关系

$$\beta = \frac{u}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

因此

$$(\Delta s')^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = (\Delta s)^2$$

即在洛伦兹变换下，两个事件的间隔是一个不变量。间隔又可以写成

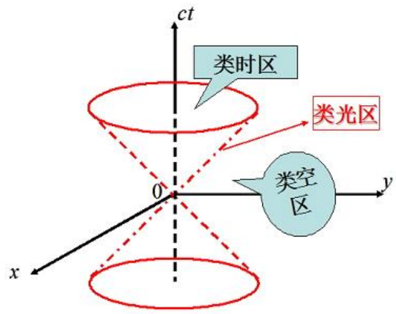
$$(\Delta s)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2$$

当$(\Delta s)^2 > 0$时

$$\left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right| < c$$

此时两个事件之间总可以建立因果关系，并与参照系的选取无关，这样的间隔称为**类时间隔**。而当$(\Delta s)^2 < 0$时

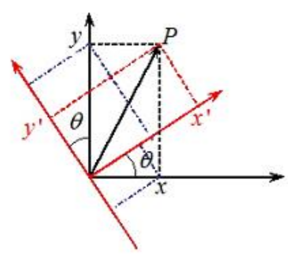
$$\left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right| > c$$



此时两个事件无法建立因果关系，在不同的参照系，两个事件发生的先后次序可以颠倒。这样的间隔称为**类空间隔**。相应的可以将全时空分为**类时区域**，**类光区域和类空区域**。其中类光区域满足$(\Delta s)^2 = 0$。

闵可夫斯基空间和四维转动

二维平面的坐标系转动：坐标系S'相对于坐标系S转动一个角θ。在S系中，P点坐标为(x, y)，在S'系中，P点坐标为(x', y')。则相应的变换关系为



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

可以看到OP的长度在这个变换下是不变的

$$OP^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = constant$$

更一般地，令$\vec{A}$为平面上任意矢量。在S系中，$\vec{A}$的分量为$\left(A_x, A_y\right)$；在S'系中，$\vec{A}$的分量为$\left(A'_x, A'_y\right)$，则

$$A'_x = A_x cos\theta + A_y sin\theta$$

$$A'_y = -A_x sin\theta + A_y cos\theta$$

则该矢量的长度在二维转动变换下不变

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 = A_x'^2 + A_y'^z$$

转动变换只是改变了坐标系的坐标轴方向，不会改变一个矢量的大小，但是由于坐标轴方向改变了，因此在坐标轴上的投影大小会发生改变，也就是改变了矢量分量的大小。

在三维情况下的转动情况类似。某点在S系中坐标为(x, y, z)；在S'系中坐标为(x', y', z')，则两组坐标满足变换关系

$$x' = a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z$$

$$y' = a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z$$

$$z' = a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z$$

其中a为与转动相关的变换系数。坐标系转动时长度是保持不变的，因此有

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

在狭义相对论中，事件满足洛伦兹变换，而之前证明了在洛伦兹变换下两事件的间隔对于洛伦兹变换是不变的。

$$(\Delta s')^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = (\Delta s)^2$$

其中

$$(\Delta s)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$(\Delta s')^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

如果建立一个四维空间，其中三维坐标是实数，另外一维为虚数，那么这个空间中一个矢量的长度的计算方式正是像上面式中的间隔一样。因此在数学上，狭义相对论的时空坐标可以用这样的四维空间来表达。这样的空间被称为**闵可夫斯基空间**。也就是说时空坐标为闵可夫斯基空间的坐标。通常被表示为(ict, x, y, z)。

注意其中时间部分是虚数，上面乘上了光速是为了使得时间相关的坐标与空间坐标量纲相同。经常也将它记为(x^1,x^2,x^3,x^4)，其中

$$x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad x^4 = ict$$

这样间隔就记为

$$ds^2 \equiv -dx^1dx^1 - dx^2dx^2 - dx^3dx^3 - dx^4dx^4$$

也就是说间隔实际上对应于闵可夫斯基空间中两点间的距离。而洛伦兹变换则是闵可夫斯基空间中的坐标系转动。

在经典力学中，时间和空间是分离的。从而坐标变换的形式为伽利略变换。它保证了三维空间中的长度在不同惯性系下看到的是一样的。但是在狭义相对论中，时间和空间混杂在一起，洛伦兹坐标变换或者不同惯性系之间的坐标变换对应于四维闵可夫斯基空间中的转动，或者说在此变换下四维闵可夫斯基空间中的“长度”不变。而这个“长度”（间隔）是即包括了空间部分，也包括了时间部分的。从这个角度来看，动尺收缩，动钟变慢现象的物理原因也变得清晰了。空间长度和时间仅是四维时空矢量在空间方向和时间方向上的投影。在四维转动下，四维矢量的长度没有变化，但是在不同坐标方向上的投影发生了变化，于是造成了动尺收缩，动钟变慢现象。

这里需要注意的是四维闵可夫斯基空间的时间分量是虚的，这与一般的实空间有所不同，会出现不为零的四维矢量其大小可能为零的现象。

狭义相对论动力学

很明显牛顿方程本身在洛伦兹变换下不是不变的。因此在修正了相对性原理的情况下还需要修正牛顿动力学方程。人们发现修正方式并不复杂，其基本形式还是保持着牛顿运动方程的原始形式

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

区别是此时质量m不在是常数，而是会随着运动速度的不同而改变，

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

其中m_0是物体静止时的质量，m称物体的动质量。在低速（$v \ll c$）情况下，容易看到动质量和静止质量基本相同。在日常生活中物体运动的速度并不达，即使是超音速飞机，速度达到了$1000m/s$，在上式中可以算出静止质量和动质量的差

别也仅为10^{-10}。对于一架 10 吨重的战斗机，其修正大概仅为 1 克。但是在很多情况下物体的运动速度可以非常高，比如在高能加速器中的粒子可以被加速到接近光速的速度，那时动质量和静止质量的差别很大。必须使用狭义相对论来处理。

动能与质能关系

在推广牛顿运动方程的时候还需要推广速度的概念，类似于建立四维时空坐标，需要建立一个四维的速度，且该速度应该是大小在洛伦兹变换下不变的量。顺着这个思路可以得到这样一个方程（如想知道详细推导过程，参见其他相关书籍）

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

利用关系$\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$，则有

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v}$$

在方程两边同乘以m后得

$$m\frac{d(mc^2)}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot m\vec{v}$$

即

$$\frac{d(m^2c^2)}{dt} = \frac{d(m^2v^2)}{dt}$$

积分得

$$m^2c^2 = m^2v^2 + C$$

其中C为积分常数。为确定这个常数，可以考虑初始时速度为零的情况

$$v = 0 \rightarrow m = m_0 \quad C = m_0^2c^2$$

由此可得

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

另外当一个物体受到力$\vec{F}$持续加速。该力做功的功率为

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

W为力做的功。对比之前的式子可以得到

$$\frac{d(mc^2)}{dt}=\frac{dW}{dt}$$
两边积分得
$$mc^2+C'=W$$
这里的C'同样是积分常数。当力最初还没有开始做功时，物体的速度为零，上式变成
$$m_0c^2+C'=0$$
因此
$$C'=-m_0c^2$$
所以力所做的功为
$$W=mc^2-m_0c^2$$
由此式爱因斯坦认为物质的质量和能量是可以相互转换的。物质的总能量应该表示为
$$E=mc^2$$
这就是著名的**质能关系**。现代大量的实验，包括原子弹的成功爆炸都证明了这个关系的正确性。

在低速情况下，由于
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots$$
则
$$W=\frac{1}{2}m_0v^2+\cdots$$
即在低速情况下力所做的功转换成物体的动能。这就是牛顿力学中的功能关系。

速度变换

下面考虑不同惯性系看到同一物体的速度间的变换关系。设一个质点在t时刻处于S中的$(x，y，z)$处，其速度为(v_x,v_y,v_z)，则
$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt}.\quad v_z=\frac{dz}{dt}$$
则在S'系，由洛伦兹变换得到
$$dx'=\gamma(dx-udt)$$

$$dy' = dy, dz' = dz$$

$$cdt' = \gamma(cdt - \beta dx)$$

因此S’系中看到该质点的速度为

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = c\frac{dx - udt}{cdt - \beta dx} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{c}{\gamma}\frac{dy}{cdt - \beta dx} = \frac{\gamma v_y}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

$$v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{c}{\gamma}\frac{dz}{cdt - \beta dx} = \frac{\gamma v_z}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

当$|\vec{v}| \ll c$，$u \ll c$时，这些变换回到伽利略速度变换关系。

$$v_x' = v_x - u$$

$$v_y' = v_y$$

$$v_z' = v_z$$