课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt.23、24

《新概念物理教程：力学》：第六章第 1 节，附录 3

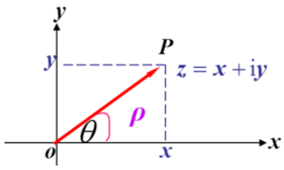
Lecture 15 Resonance

**复数和三角函数的关系**

复数有两种表示形式。一种是他的实部+虚部，另一种是模乘以它的指数函数。数学可以证明 sin 和 cos 函数和指数函数有一个很紧密的关系。即：

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

由此一个复数$z = x + iy$又可以表示为




$$z = |z|e^{i\theta}$$

其中$|z|$为该复数的模。

指数表达有一个非常重要的性质就是在求导的时候比较简单：

$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$$

由此

$$\frac{\mathrm{d}e^{ix}}{\mathrm{d}x} = ie^x$$

这个关系在处理微分方程时常常可以带来方便。

现实生活当中我们用的都是实数，复数一开始的应用是为了简化计算。经常会把时间，能量，坐标，动量等等变成一个复数再进行计算。

下面用一个例子来了解怎么样用复数来解物理问题：

**受迫振动**

谐振子是之前已经讨论过的物理体系。谐振子的力是一个恢复力$F = -kx$。其方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

如果在谐振子上除了恢复力外再加上一个简谐变化的外力

$$F' = F_D\cos(\omega t + \delta)$$

其中$F_D$、$\omega$、$\delta$为常数。这个力是$t$的函数。方程变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\cos(\omega t + \delta)$$

解方程的难度变大了。如果我们将$x$变为复数$X$，将$\cos(\omega t + \delta)$变为$e^{\mathrm{i}(\omega t + \delta)}$，则

方程变为

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\omega_0^2X=\frac{F_0}{m}e^{i(\omega t+\delta)}$$

其中$\omega_0^2=\frac{k}{m}$。这是一个复方程，之前的方程是这个方程的实部。f

则

$$X_0=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

方程的解为

$$X=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}e^{i(\omega t+\delta)}$$

原方程的解$X$就是的实部。已经找到了一个解，这个解称为非齐次方程的特解，非齐次是指这个方程中含有不包含变量$X$的部分，即$\frac{F_0}{m}e^{i(\omega t+\delta)}$。但是这个方程绝对不止一个解，实际上有无穷多个解，先假定$F_0=0$，方程变为齐次方程

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\omega_0^2X=0$$

这就是谐振子方程，其解为$Ae^{i(\omega_0t+\beta)}$，$A,\beta$为任意常数。这是齐次方程的通解。齐次方程是指方程的每一项都是关于$X$线性的。齐次方程的一个通解加非齐次方程的一个特解，就是非齐次方程的通解。因此通解为

$$X=Ae^{i(\omega_0t+\beta)}+\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}e^{i(\omega t+\delta)}$$

对于受迫振动，可以看到一个特征频率是$\omega_0$的谐振子，在加了周期变化的外力之后，其振动的频率不仅为$\omega_0$了，而是$\omega_0$和外力变化频率$\omega$两种振动的叠加。当两个振动频率非常接近时，通解的第二项就会变得很大，这种情况称为共振。

**阻尼振动**

其实很多的谐振子都存在阻尼，也就是可能有摩擦。比如一个弹簧挂在那里，它振动一会就会停下来，因为弹簧有摩擦力会发热。所以除了恢复力，外力，还有第三个力：阻尼力。在速度比较小的时候，阻尼力的大小和速度成正比。

$$F_f=-c\frac{dx}{dt}$$

其中$c$为阻尼系数。定义$\gamma=\frac{c}{m}$，则在有阻尼的情况下受迫振动的方程为

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\gamma\frac{dX}{dt}+\omega_0^2X=\frac{F_0}{m}e^{i(\omega t+\delta)}$$

同样设方程的解为$X=X_0e^{i(\omega t+\delta)}$，带入方程可以得到

$$-\omega^2 X_0 + i\gamma\omega X_0 + \omega_0^2 X_0 = \frac{F_0}{m}$$

则

$$X_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{i(\omega t+\delta)}$$

令$tan\theta = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$，则

$$X_0 = \rho e^{i(\omega t+\delta+\theta)}$$

其中模$\rho$满足关系

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} = \frac{1}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

$\rho^2$随外力频率$\omega$的变化曲线如图，可以看到当有阻尼的情况下，外力频率$\omega$和固有频率$\omega_0$相同时，体系的振幅不会是无穷大，而是有限大。图中达到顶点的地方就是峰，称共振峰。另外此分布的半高宽正好是 γ，即分布曲线在最大值一半高度处曲线的宽度。

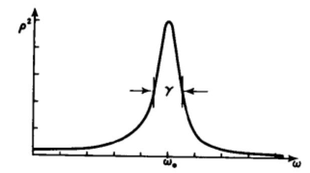



Fig. 23–2. Plot of $\rho^2$ versus $\omega$.

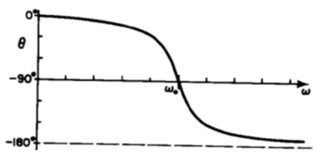



Fig. 23–3. Plot of $\theta$ versus $\omega$.

复角$\theta$对应与谐振子的振动相位与外力相位的差别。当$\omega$很小的时候，复角等于 0，当$\omega$很大的时候，复角是 $180^0$，当$\omega = \omega_0$的时候，也就是外力的驱动频率等于$\omega_0$的时候，它的复角正好是 $90^0$。实际上当阻尼比较小的情况下，$\theta$从 0 变化到 $180^0$ 的区间很窄。也就是说当$\omega < \omega_0$时，$\theta$基本就是 0，而当$\omega > \omega_0$时，$\theta$基本就是 $180^0$。在$\omega = \omega_0$附近，$\theta$快速地从 0 变化为 $180^0$，这种现象称为相变。

对于弹簧，周期性的外力会给体系输入能量，而阻尼的作用是将部分机械能转换成热能。对于原子分子则不一样，原子中的电子也可近似看成谐振子。光是电磁波，射到原子上后就给了电子一个周期性的外力，形成受迫振动。而对于原子中的电子，其阻尼就是辐射，也就是发光。因此我们用光线照亮物体的过程可以认为是光线造成原子中的电子形成受迫阻尼振动，其通过阻尼过程放射电磁波，如果照射光线的频率正好和电子谐振的频率一样，它的放射电磁波就相当多，如果不一样，放射的就少。我们能看到的它放射的光的颜色就是它谐振子的频率，如果我们看到的是黄色的，就说明谐振子振荡的$\omega_0$ 就是黄色的，它可以吸收很多的光，再把它放射出来，所以我们看到墙上的光就是个共振的现象。

# Lecture 16 Resonance damping

很多物理系统的寿命是有限的。比如说原子的激发态，或者是一些力学系统。其寿命有限是由于阻尼造成衰减的过程。正如刚才讲到的一个弹簧在空气当中振动的时候，慢慢的就会停止下来。现在我们要认真地研究象一些摩擦力，热损失等等的阻尼过程。

在阻尼的过程中能量出现了损失。最初体系在振荡的时候是有能量的，如果没有外力，那么它在振荡的过程当中由于阻尼的作用就会逐渐停下来。所以能量就损失了。现在要研究这个能量损失的过程服从一个什么样的规律？

谐振子的能量和它的振幅有关系。如果它的能量是用复数来表示的，那么我们如何去计算？

对于一个复数

$$A = A_0 e^{i(\omega t+\delta)}$$

其实部为$A_0\cos(\omega t+\delta)$，实部平方为$A_0^2\cos^2(\omega t+\delta)$；实部为$A_0\sin(\omega t+\delta)$，实部平方为$A_0^2\sin^2(\omega t+\delta)$。从物理上看，这个复数是一个震荡的形式。很多时候我们关心的是这个数对于长时间的平均值。由于函数的周期性，那么只需计算一个周期内的平均值即可。容易看到，对于实部平方的平均和对于虚部平方的平均是一样的。而

$$< 1 > = 1 =< \cos^2(\omega t+\delta)+\sin^2(\omega t+\delta) >$$

因此

$$\langle\cos^2(\omega t+\delta)\rangle = 1/2$$

上式中的<>表示做平均。对于一个复数来说，其平方的平均就是模平方的 1/2。

$$\langle AA^*\rangle = \frac{1}{2}A_0^2$$

**受迫阻尼振动中的能量**

受迫阻尼振动的方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2 x = F(t)$$

外力对体系做功，其功率就是力乘以速度

$$P = F\frac{dx}{dt} = m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega_0^2 x\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]+\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

注意到关系

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

则前式右边第一项就是系统的总能量，即动能加势能，对时间的导数。

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\right] = \frac{dE}{dt}$$

对于较长的时间来说，谐振子处于稳定的状态，因此储存在谐振子中的能量是常数，也就是说上面这项的时间平均应该是零。因此平均功率为

$$< P >=< \gamma m(\frac{dx}{dt})^2 >$$

根据复数的性质，可以得到

$$< P >= \frac{1}{2}\gamma m\omega^2x_0^2$$

其中$x_0$为谐振子的振幅。由于体系有阻尼，在无外力的情况下振动将逐渐衰减。而外力的作用就是补充阻尼所造成的能量衰减。

**Q-value (品质因子)**

品质因子定义为谐振子所储存的平均能量的 2π 倍与平均外力做功的比值。也就是存储的能量和损失的能量之比。

$$Q = 2\pi\frac{< E >}{< P > 2\pi/\omega}$$

谐振子存储的平均能量为

$$< E > \ = \frac{1}{2}m < \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 > + \frac{1}{2}m\omega_0^2 < x^2 >= \frac{1}{2}m(\omega^2 + \omega_0^2)\frac{1}{2}x_0^2$$

因此 Q 因子为

$$Q = 2\pi\frac{\frac{1}{4}m(\omega^2 + \omega_0^2)x_0^2}{\frac{1}{2}\gamma m\omega^2x_0^2 2\pi/\omega} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega}$$

品质因子是表示谐振子阻尼性质的物理量，也可表示谐振子的共振频率相对于带宽的大小，高 Q 因子表示谐振子能量损失的速率较慢，振动可持续较长的时间，例如一个单摆在空气中运动，其 Q 因子较高，而在油中运动的单摆 Q 因子较低。高 Q 因子的谐振子一般其阻尼也较小。当外力驱动等于他系统的本身的频率的时候，品质因子就很简单，就是$\omega_0/\gamma$。所以$\gamma$越小 Q 就越大。

**阻尼与平均寿命**

在有外力驱动的时候谐振子可以维持在平衡的状态。如果把外力忽然撤掉，这时候能量就会不断地减少，谐振子就会慢慢地停下来。现在我们研究停下来的过程能量是怎么样慢慢减少的。

考虑谐振子储存能量与外力做功的关系

$$<P>=\frac{\omega<E>}{Q}$$

这个式子表明外力为体系提供的用以弥补阻尼消耗做功大小。因此等式右边就是阻尼做负功的功率。在一个周期内能量损失的多少就是能量对时间的导数。当无外力的时候，能量损失为

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\omega E}{Q}$$

此方程的解为

$$E=E_0e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}=E_0e^{-\gamma t}$$

因此谐振子所储存的能量是以指数方式衰减的。经过$\frac{1}{\gamma}$时间之后，能量会衰减成原能量的$1/e$。我们将$\frac{1}{\gamma}$称为该谐振子的寿命。

**阻尼振动求解**

阻尼振动的方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

设方程的解为

$$X=Ae^{i\alpha t}$$

代入方程得

$$(-\alpha^2+i\gamma\alpha+\omega_0^2)Ae^{i\alpha t}=0$$

当$\omega_0^2>\frac{\gamma^2}{4}$时，上式的解为

$$\alpha=i\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}=i\frac{\gamma}{2}\pm\omega_\gamma$$

其中$\omega_\gamma=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$。原方程的解为

$$x=Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{i\omega_\gamma t}$$

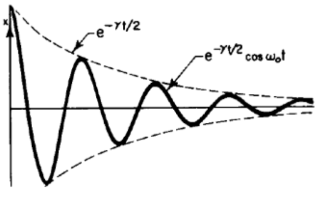



Fig. 24–1. A damped cosine oscillation.

也可以写作

$$x = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega_\gamma t$$

由此可见由于阻尼的存在，体系的振动振幅指数衰减。同时其振动频率也有所变化。更完整的解为

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma t})$$

考虑到实际的解应该为实数，因此可以将一般解写作

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t})$$

容易计算阻尼振动的能量随时间的变化为

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t}$$

其中$E_0$为初始能量。

利用初始条件可以计算一般解中的待定常数。设在$t = 0$时$x = x_0$，$\frac{dx}{dt} = v_0$。将其带入方程

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t)}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{dt} = e^{-\frac{\gamma t}{2}}((-\frac{\gamma}{2} + i\omega_\gamma)Ae^{i\omega_\gamma t} + (-\frac{\gamma}{2} - i\omega_\gamma)A^* e^{-i\omega_\gamma t})$$

得

$$x_0 = A + A^* = 2A_R$$

$$v_0 = -\frac{\gamma}{2}(A + A^*) + i\omega_\gamma(A - A^*) = -\frac{\gamma}{2}x_0 - 2\omega_\gamma A_I$$

其中$A_R$，$A_I$分别为 A 的实部和虚部

$$A = A_R + iA_I$$

$$A_R = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad A_I = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

计算后得

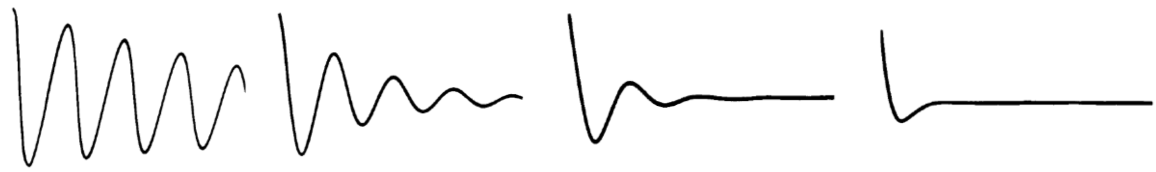
$$A_R = \frac{x_0}{2}$$

$$A_I = \frac{v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0}{2\omega_\gamma}$$

最后得到阻尼振动的解为

$$x = e^{-\gamma t/2}[x_0 cos\omega_\gamma t + \frac{v_0 + \frac{\gamma x_0}{2}}{\omega_\gamma} sin\omega_\gamma t]$$

当增加阻尼的时候，体系振幅衰减的速度变快，下面几张图就是在逐渐增加



阻尼时谐振子的振动情况。

对于$\frac{\gamma}{2} > \omega_0$的情况，之前的计算并不正确，$\alpha$的解应该是

$$\alpha = i\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

则阻尼振动的解为

$$x = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)t} + Be^{-\left(\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)t}$$

注意到$\frac{\gamma}{2} > \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$，因此这个解依然是衰减的解，而且没有振动，体系直接回到平衡位置。这种情况被称为过阻尼，之前的情况称为欠阻尼。

另外还有一种情况，即$\frac{\gamma}{2} = \omega_0$，这种情况下方程的解为

$$x = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

仍然是衰减。