课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt. 13、14

《新概念物理教程：力学》：第三章

第 13 讲 能量与功

对于地球表面的自由落体，我们知道其机械能是守恒的

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = const$$

其中动能$T = \frac{1}{2}mv^2$，势能$U = mgh$，因此能量守恒表达为

$$T + U = const$$

这个规律可以认为是实验定律。另一方面，这一守恒律也是可以通过牛顿定律导出的。

动能的变化率为

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{dv}{dt}$$

根据牛顿方程$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$，可以得到

$$\frac{dT}{dt} = Fv$$

由于$F = -mg$，速度$v = \frac{dh}{dt}$，则有

$$\frac{dT}{dt} = -mg\frac{dh}{dt}$$

又可以写作

$$\frac{d(T + mgh)}{dt} = \frac{d(T + U)}{dt} = 0$$

由此得到能量守恒。

考虑一般的 3 维运动的质点，其动能为

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^3)$$

对动能求导得

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

因此动能的变化率为力和速度的标量积，称之为功率。

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

也就是说动能的变化为施加与之上的力的功率。上式两边对时间做积分，注意到 $\vec{v}dt = d\vec{r}$

$$\int P\,dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = W$$

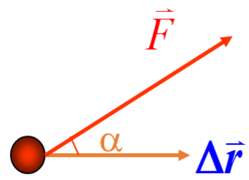
上式右边为力内积位移的积分，称之为功。需要注重的是**此积分是沿着路径的积分**。用微元的写法上式又可以表述为

$$Pdt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW$$

或者

$$P = \frac{dW}{dt}$$

也就是说功率是单位时间内力做的功。



常力下做的功：

如果位移为$\Delta\vec{r}$，则

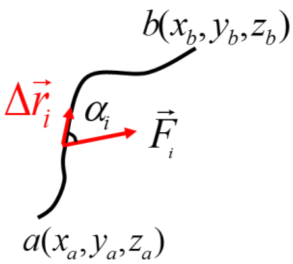
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = Fcos\alpha|\Delta\vec{r}|$$

变化的力做的功：

当力在不断变化时，可以用微元的办法计算功，也就是说将路径分成很多的小段，每段路上将力近似看作是不变的，于是有

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_i F_i cos\alpha_i |\Delta\vec{r}_i|$$

当小段路径趋于零时，上式就变成了积分



$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

在直角坐标系下

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz$$

在自然坐标系下

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b Fcos\alpha ds$$

受约束运动

在很多情况下，物体的运动是受约束的，比如过山车是沿着轨道运动的。对

于受约束的运动，一定会有约束力作用在物体上，但这些约束力通常是垂直于运动方向的。因此约束力不做功。对于无摩擦的约束运动，由于约束力不做功，因此在不考虑约束力的情况下，能量依然是守恒的。

由于只有当受力物体有运动的情况下力才做功，因此当一个人抓着东西不动的时候，是不做功的。另外当一个人拎着东西保持高度不变的情况从一个地方走到另一个地方，由于拎东西的力与物体的运动轨迹垂直，也不做功。这似乎跟日常经验不符，因为在做这两种动作的时候，人会感觉到疲劳，有能量的消耗。大家可以思考一下这种情况下既然拎东西的力不做功，人的能量到哪里去了。

在有摩擦的情况下，由于摩擦力与运动方向相反，摩擦力会做负功，同时所消耗的能量会转变为热能，这个时候机械能不守恒。

合力的功等于各分力的功的代数和。

$$W=\int_a^b\left(\sum_i \vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r}=\sum_i\int_a^b\left(\vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r}=\sum_i w_i$$

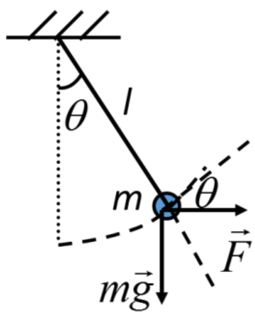
在Δt时间内的**平均功率**定义为

$$\bar{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Δt趋于零时为**瞬时功率**

$$P=\frac{dW}{dt}$$

[例] 小球在水平变力$\vec{F}$作用下缓慢移动，即在所有位置上均近似处于力平衡状态，直到绳子与竖直方向成θ角。 求：(1) $\vec{F}$的功， (2) 重力的功。



解：绳子上的力在运动过程中由于力的方向与运动方向垂直，所以不做功。重力和拉力由于在力的方向上小球有位移，因此它们是做功的。

考虑运动过程中受力平衡，将拉力和重力在垂直于绳子方向投影后，它们的合力应该为零，于是可得

$$F\cos\theta=mg\sin\theta$$

即

$$F=mg\tan\theta$$

因此拉力在运动方向上的分量为

$$F_t = mg\tan\theta\cos\theta = mg\sin\theta$$

这是一个随路径变化的力，其做功需要用积分来计算

$$W_F = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F_t ds = \int_0^\theta mgsin\theta ld\theta = mgl(1-cos\theta)$$

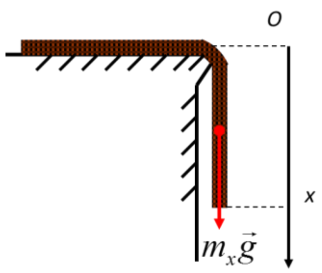
注意在上式中$ds = ld\theta$。类似地可以计算重力做的功

$$W_{mg} = \int m\vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_0^\theta -mgsin\theta ld\theta = -mgl(1-cos\theta)$$

可以看到重力做的功与拉力做的功大小是一样的，但符号是相反的。这是因为在这个过程中能量是守恒的，因此拉力做的功是用来抵消重力做功的。

建议：当解一个物理的题目时，先猜测答案，然后再去计算验证，如果有偏差，很可能是中间的计算有误，经常做到这一点，那你就是一位“近似”的物理学家了。

[例]质量 m 长 l 的均匀链条，一部分放在光滑桌面上，另一部分从桌面边缘下垂，下垂部分长 b，假定开始时链条静止，求链条全部离开桌面瞬间的速度。



解法一：定义$m_x = \frac{m}{l}x$为下垂部分质量。当链条下落dx时重力做功为

$$dW = m_x g dx + m_{dx} g(\frac{dx}{2})$$

等式右边第二项为原来在桌子上的部分下滑后做的功，但考虑到这一部分的质量m_{dx}为一阶小量，因此$m_{dx}g(\frac{dx}{2})$为二阶小量，相比第一项而言可以忽略，因此

$$dW = m_x g dx$$

积分得

$$W = \int_b^l m_x g dx = \int_b^l \frac{m}{l} x g dx = \frac{mg}{2l}(l^2 - b^2)$$

重力做功为体系动能的增加，因此

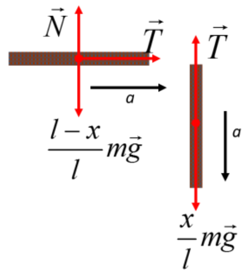
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg}{2l}(l^2 - b^2)$$

则

$$v = \sqrt{\frac{g(l^2 - b^2)}{l}}$$

解法二 将体系分为桌面部分和下垂部分，分别做受力分析如图，对这两部分分别列牛顿方程为

$$\begin{cases} \frac{x}{l}mg - T = \frac{x}{l}ma \\ T = \frac{l-x}{l}ma \end{cases}$$



消掉张力 T 可得

$$a = \frac{x}{l}g$$

由于

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

带入前式得

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{x}{l}g$$

或

$$vdv = \frac{x}{l}gdx$$

积分得

$$\int_0^v vdv = \int_b^l \frac{x}{l}gdx$$

最后可得

$$v = \sqrt{\frac{g(l^2 - b^2)}{l}}$$

动能的变化

由于

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P$$

于是可以得到动能的变化为功率的时间积分

$$\Delta T = \int Pdt = W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

这就是能量守恒的另外一种表达方式。

功的单位是焦耳，1 焦耳(J)=1 牛顿·米(Nm)。功率的单位为瓦特，1 瓦特(w) = $1\,\frac{\text{焦耳}(J)}{\text{秒}(s)}$。另外一个常用的功率单位是马力，1 马力=746 瓦特。

万有引力场

对于地球表面的万有引力场，重力加速度为常数，方向垂直地面向下。因此是一个均匀场。若取垂直地面向上为直角坐标系的 z 坐标轴方向，则

$$\vec{F}_g = -mg\vec{k}$$

由此重力做功为

$$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -mgdz$$

质点在重力的作用下运动，当其高度从h_1变为h_2时，由机械能守恒知道质点的动能变化为

$$\Delta T = -mg\int_{h_1}^{h_2} dz = -mg(h_2 - h_1)$$

因此可以知道对于抛体运动，在不考虑空气阻力的情况下其动能的改变仅与轨迹的高度差有关，而与水平位置无关。

对于一般的万有引力，其并不为常数，而是与距离的平方成反比的。如设太阳的质量为 M，一行星的质量为 m，以太阳为坐标原点，则行星受到的万有引力为

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

其中$\vec{r}$为行星的坐标。值得注意的是万有引力是各向同性的力，也就是说其大小仅与距离有关，而跟方向无关。因此用极坐标计算万有引力做功比较方便

$$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

上式中仅出现了r，而没有角度。因此当行星从$\vec{r}_1$运动到$\vec{r}_2$时，其动能的改变为

$$T_2 - T_1 = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{Mm}{r^2}dr = GMm(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$$

可以看到在一般情况下，万有引力做功仅与运动的初始和终点位置有关，和具体的路径无关。整理上式可得

$$T_2 - \frac{GMm}{r_2} = T_1 - \frac{GMm}{r_1}$$

因此存在关系

$$T-\frac{GMm}{r}=constant$$

其中$-\frac{GMm}{r}$为万有引力势。

线性弹簧

对于一维线性弹簧，以平衡位置为坐标原点，其弹力可以表示为

$$F=-kx$$

因此弹力做功为

$$W=\int Fdx=-k\int xdx\ =-\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)$$

由机械能守恒

$$W=-T_1$$

则

$$T_2+\frac{k}{2}x_2^2=T_1+\frac{k}{2}x_1^2$$

即

$$T+\frac{1}{2}kx^2=constant$$

其中$\frac{1}{2}kx^2$称为弹簧的势能。

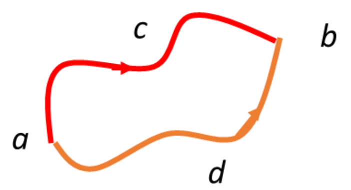
第 14 讲保守力与势能

在前一讲的几个例子中，引入称为势能的概念。而能量守恒就可以表述为体系的动能和势能的和保持不变。但是势能的引入是否是普适的呢？

保守力：

对于万有引力来说，我们看到其做功仅与起点和终点的位置有关，和路径无关。这种性质并不是普适的，对于有些力其做功的大小是和路径有关的，比如摩擦力。因此我们定义那些做功与路径无关的力为保守力，做功与路径有关的为非保守力。

对于保守力来说，既然其做功与路径无关，那么对于任何闭合路径其做功必然为零。如图所示，任意闭合回路都可以划分为adb和bca两部分。无论是沿着adb还是acb从a点运动到b点，保守力做功是相同的。而从acb从a点运动到b点与沿着相反的路径bca从b点运动到a点保守力做功的大小是相同的，符号是相反的。这一点可以从积分上下限反转的性质得到。那么沿着adb从a点运动到b点所做的功与沿着路径bca从b点运动到a点保守力做功的大小是相同的，符号是相反的。因此总功应该为零。由此可以得到保守力的判据



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} = 0 & \vec{F}\text{为保守力} \\ \neq 0 & \vec{F}\text{为非保守力} \end{cases}$$

其中$\oint$ 为闭合回路积分。

典型的保守力

有心力：

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

如万有引力

$$\vec{F_g} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

恒力

$$\vec{F} = constant\ vector$$

如重力

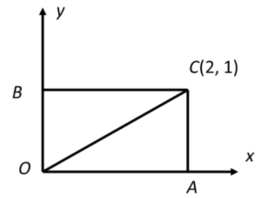
弹性力：

$$F = -kx$$

[例] 已知$\vec{F}=2y\vec{\imath}+4x^2\vec{\jmath}$，C 点坐标为(2,1)，求

(1) $\vec{F}$做的功：a) 沿路径 OAC；b) 沿路径 OBC；c) 沿路径 OC

(2) $\vec{F}$是否为保守力?



解： (1) 做功为

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int (F_x dx+F_y dy)$$

则

$$W_{OAC}=\int_{OA}(2ydx+4x^2dy)+\int_{AC}(2ydx+4x^2dy)$$

$$=\int_0^2 2y|_{y=0}\,dx+\int_0^1 4x^2|_{x=2}dy=16(J)$$

$$W_{OBC}=\int_{OB}(2ydx+4x^2dy)+\int_{BC}(2ydx+4x^2dy)$$

路径 OC 满足方程

$$x=2y$$

则

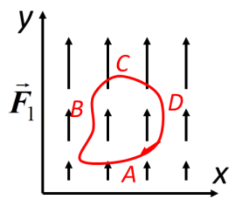
$$W_{OC}=\int_{OC}(2ydx+4x^2dy)=\int_{OC}(xdx+16y^2dy)$$

$$=\int_0^2 x\,dx+\int_0^1 16y^2dy=7.33(J)$$

(2) 由于做功与路径有关，因此此力为非保守力。

【例】力$\vec{F}_1=ay\vec{\jmath}\,(y>0)$, $\vec{F}_2=bx\vec{\jmath}\,(x>0)$ $(a,b>0)$是否为保守力

解，$\vec{F}_1$力场示意如图，在其中取任意闭合路径 ABCDA

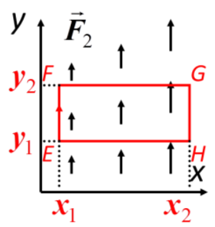


则沿此路径做功为

$$\oint \vec{F}_1\cdot d\vec{r}=\oint ay\vec{\jmath}\cdot dy\vec{\jmath}=\oint aydy=0$$

因此此力做功与路径无关，为保守力。

$\vec{F}_2$力场示意如图，在其中取矩形闭合路径 EFGHE



$$\oint \vec{F}_2\cdot d\vec{r}=\int_{EF}bxdy+\int_{GH}bxdy$$

$$=bx_1(y_2-y_1)+bx_2(y_1-y_2)<0$$

做功与路径有关，因此此力为非保守力。

一般来说只是表面看是不容易看出来一个力是否为保守力，我们建议一定要去计算。人们发现**所有的基本相互作用都是保守力**。其背后的原因是时间的均匀性，即基本相互作用的性质与时间无关。

保守力场中的势能

对于保守力，由于其做功仅与起点和终点有关，因此可以引入势能的概念。物体在保守力场中a，b两点的势能U_a，U_b 之差等于质点由a点移动到b点过程中保守力做的功W_{ab}

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{ab}$$

上式又可以写成

$$W_{ab} = -(U_b - U_a) = \Delta U$$

也就是说保守力的功等于势能的减少。

由上面的式子看到，我们定义的是势能的变化，而不是某点势能的绝对大小，因此为方便计算，可以先设定某点的势能大小，或者说设定势能的零点位置。这样就可以把势能的大小确定下来。需要注意的是这种设定是任意的。只是在具体问题中会有一些习惯设定。如对于重力势能，常设定势能零点为 z 坐标为零的位置，因此重力势能为$U = mgz$。一般情况下的万有引力常设定无穷远为势能零点，则万有引力势能为$U = -\frac{GMm}{r}$。对于弹簧，常设定平衡位置为势能零点，则弹性势能为$U = \frac{1}{2}kx^2$。

保守力与势能的关系

当设定好势能零点的位置（如p_0点）后，容易发现对于任意p点来说，其势能为

$$U_p = \int_p^{p_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

从微分的角度看，在很小的位移下保守力做功和势能变化的关系为

$$dW = -dU$$

考虑到

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

以及

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

其中对x，y，z的微分为偏微分。因此可以得到

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

则

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla U$$

其中

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

称为梯度算符。因此力为势能的梯度。

【例】已知势能函数，求保守力。1）$U = mgz$；2）$U = -\frac{GMm}{r} + c$

解：1)

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) mgz = -mg\vec{k}$$

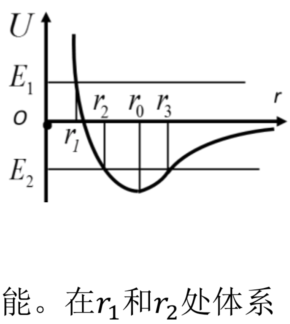
2) 球坐标下梯度算子为

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

则

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(-\frac{GMm}{r} + c\right) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

在有了势能的概念后，人们发现利用势能随位置变化的曲线可以比较方便地理解力的相关物理性质。如右图为分子间作用力的势能曲线。由于势能曲线的负梯度为力。因此容易看出在不同位置上力的方向。同时结合能量守恒，就可以做出很多对物理性质的定性判断。



如当体系的机械能为E_1时，由于机械能为动能和势能的和。那么体系r的取值范围只能在r_2和r_3之间，否则动能会变成负的。也就是说E_2和势能曲线间的间距就是体系的动能。在r_1和r_2处体系的动能为零，即在这两个地方体系的速度为零。那么这种状态是否能保持下去呢?

并不能，因为这两点的势能曲线的斜率并不为零，在r_2处斜率为负，则力是指向正方向的，在r_3处斜率为正，则力是指向负方向的。这两个力会推到体系离开r_2和r_3两点向中间运动。而在r_0处斜率为零，也就是说此时体系不受力。但此时体系的动能不为零，因此体系也不能停留在此处。总之体系会在r_2和r_3之间往返运动。这种状态被称为**束缚态**。

而当体系的能量为E_1时，假设开始体系是沿着负方向运动的，那么可以看到其动能会不断变化，当到达r_1时动能为零，这时候受到的力并不零，是指向正方向的，那么体系又会回头向正方向运动，一直运动到无穷远。这样的状态称自由态。

[例] 已知地球半径 R，物体质量 m，处在地面 $2R$ 处。求势能:（1）地面为零势能点；（2）无限远处为零势能点。

解：

$$U_p = \int_p^{p_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

（1）

$$U = \int_{3R}^{R} \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{2}{3R} GMm = \frac{2}{3} mgR$$

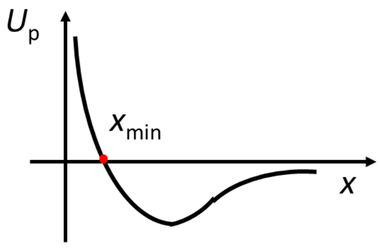
(2)

$$U = \int_{3R}^{\infty} \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr = -GMm \frac{1}{3R} = -\frac{1}{3} mgR$$

【例】已知分子间相互作用的势函数为：

$$U = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

a、b为正常数，函数曲线如图，如果分子的总能量为零。求：(1) 双原子之间的最小距离； (2) 双原子之间平衡位置的距离



解：(1) 总能量 $E = T + U = 0$。则当动能$T = 0$时，势能U最大，两原子之间有最小距离。

$$\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0$$

解得

$$x_{min} = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$$

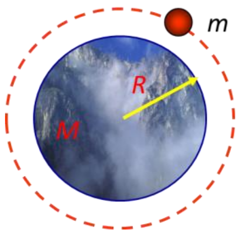
(2) 平衡位置相互作用为零。

$$F = -\frac{d}{dx}U = 12\frac{a}{x^{13}} - 6\frac{b}{x^7} = 0$$

解得

$$x_e = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$$

【例】计算第一、第二宇宙速度



一、第一宇宙速度

已知：地球半径为R，质量为M，卫星质量为m。要使卫星在距地面h高度绕地球作匀速圆周运动，求其发射速度。

设发射速度为v_1，绕地球的运动速度为v。由机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h}$$

另外向心力是由万有引力提供的，满足

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

由上两式可得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{GM}{R+h}}$$

由于在地球表面 $mg = G\frac{Mm}{R^2}$，带入上式可得

$$v_1 = \sqrt{gR\left(2 - \frac{R}{R+h}\right)}$$

考虑到$h \ll R$，则

$$v_1 \approx \sqrt{gR} = 7.9 \times 10^3 m \cdot s^{-1}$$

二、第二宇宙速度

第二宇宙速度为宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度。当脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或等于零，同时飞船的引力势能为零。则由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R} = T_\infty + U = 0$$

因此

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \times 10^3 m \cdot s^{-1}$$