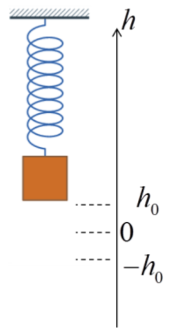
第 9 讲:简谐振动

简谐振动是最简单的振动形式，也是非常常见的运动形式，在讨论很多物理问题时都涉及到了简谐振动。



在力学中，一个一维线性弹簧就是简谐振动的典型例子。如图一线性弹簧系一重物垂直放置，弹簧质量可忽略。对于弹簧，在其受力平衡位置弹簧伸长产生的拉力重力平衡。如果以此位置为坐标原点，则当弹簧偏离平衡位置h，由**胡克定理**其受到的合力F与平衡位置间的关系为

$$F = -kh$$

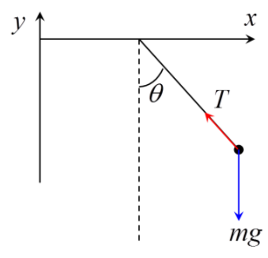
其中 k 为弹性系数，负号表明受力方向是指向平衡位置的，这样的力被称为**回复力**，因其作用是试图使得体系回到平衡位置去。线性弹簧即其形变时产生的回复力与形变量成正比，也就是胡克定理所描述的情形。**线性**的含义是就是这个与形变的正比关系，而不是与形变的某次方（非一次方）成正比。由牛顿第二定律，重物的运动方程为

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -kh$$

此方程又可写成

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{k}{m}h$$

此方程为二阶线性微分方程，二次是指二次导数。从物理上看，方程所表明的意思是加速度与形变成负的正比关系。当质点经过平衡位置往一个方向运动时，其加速度与运动方向是相反的，且越来越大。因此此时质点运动速度会逐渐减小直至零。当速度为零的时候由于质点位置已不在平衡位置，受力依然不为零。此时力的作用是产生指向平衡位置的加速度，质点的速度由零开始增加并向着平衡位置运动。到了平衡位置后质点受力为零，加速度也为零，但速度不为零，因此继续运动经过平衡位置向另一方向运动。此后的运动又与之前的分析相同。于是质点会不断在平衡位置两边往复运动，形成振动。



这样的运动有很多，例如单摆。如图所示一轻绳（不可伸长，质量可忽略）上系一质点，另一端固定在垂直于地面的平面内运动。质点受到绳子的拉力 T 和重力mg作用。利用

平面极坐标系中的牛顿方程可以得到单摆的偏角θ所满足的方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

其中 l 为单摆长度。此方程并不是线性方程，但是当摆角比较小的时候，考虑正弦函数的泰勒展开

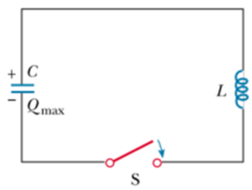
$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

在小角度下，θ的高阶项相对于低阶项小很多，可以忽略，则原方程可以近似为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

此方程与之前的线性弹簧所满足的方程形式上是一致的，因此其表现行为也是一致的。所以在小角度运动的情况下单摆的表现行为也是简谐振动。事实上对于大多数的稳定平衡体系，当体系仅在平衡位置附近运动的时候，其行为都近似表现为简谐振动的形式。例如对于固体来说，所有的原子或分子不能离开其平衡位置很远，否则体系就会发生明显形变，就不再是固体了。于是原子或分子仅能在平衡位置附近做微小的运动，此时的运动就近似为简谐振动。

在非力学体系中也有很多类似的行为。例如可以用电容和电感组成谐振电路。电容 C 与其两端电势差的关系为



$$U = \frac{Q}{C}$$

其中 Q 为电容上堆积的电荷数。电容 L 与其两端的电势差的关系为

$$U = -L\frac{dI}{dt}$$

其中 I 为电流。因此电路满足的方程为

$$\frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

电流为电荷的变化率$I = \frac{dQ}{dt}$。因此方程变为

$$\frac{d^2Q}{dt} = -\frac{1}{LC}Q$$

可以看到电荷所满足的方程也是简谐振动方程。

对于简谐运动，通常一般性地把方程写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

对于线性弹簧，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$；对于小角度单摆，$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$。

微分方程求解有不同的方法，数值求解是常用的方法之一。对于微分，如速度，其含义是在时间间隔Δt内的平均速度当时间间隔趋于零时的极限。从物理上说，实验中是无法得到无穷小的时间间隔的。$t+\Delta t$时刻的坐标与 t 时刻的坐标间的关系可近似写为

$$x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t$$

其计算结果的误差大小由Δt的大小决定。类似地，$t+\Delta t$时刻的速度与 t 时刻的速度间的关系可近似写为

$$v(t+\Delta t)=v(t)+a(t)\Delta t$$

这样，如果知道了 t 时刻的速度和加速度，就可以计算下一时刻的位置和速度。而加速度可以通过牛顿方程获得，于是不断循环下去就可以得到位置和速度随时间的变化曲线。这就是数值求解微分方程的基本思想。在实际应用中，数值计算的方法可以在前面的方法上加以变形以获得更高的计算精度，如半步法和龙特库塔方法。

半步法是用$t+\frac{1}{2}\Delta t$时刻的速度来计算 t 时刻的坐标，而$t+\frac{1}{2}\Delta t$时刻的速度则由 t 时刻的加速度来计算，具体如下：

$$x(t+\Delta t)=x(t)+v\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)\Delta t$$

$$v\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=v\left(t-\frac{1}{2}\Delta t\right)+a(t)\Delta t$$

对于初始值，即$t=0$时，速度计算为

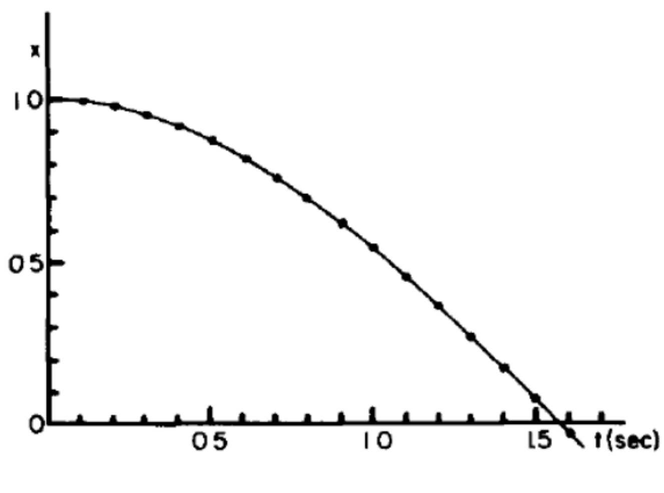
$$v\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)=v(0)+a(0)\Delta t/2$$

半步法的计算精度比之前的方法计算精度会更高一些。下

Solution of $dv_x/dt = -x$

Interval: $\epsilon = 0.10$ sec

t	x	v_x	a_x
0.0	1.000	0.000	−1.000
		−0.050	
0.1	0.995		−0.995
		−0.150	
0.2	0.980		−0.980
		−0.248	
0.3	0.955		−0.955
		−0.343	
0.4	0.921		−0.921
		−0.435	
0.5	0.877		−0.877
		−0.523	
0.6	0.825		−0.825
		−0.605	
0.7	0.764		−0.764
		−0.682	
0.8	0.696		−0.696
		−0.751	
0.9	0.621		−0.621
		−0.814	
1.0	0.540		−0.540
		−0.868	
1 1	0.453		−0.453
		−0.913	
1.2	0.362		−0.362
		−0.949	
1.3	0.267		−0.267
		−0.976	
1.4	0.169		−0.169
		−0.993	
1.5	0.070		−0.070
		−1.000	
1.6	−0.030		+0.030



面的数据和曲线是用半步法计算简谐振动的结果。

一般情况下，Δt取的越小则计算精度越高，但是与此同时计算量也会变的越大。因此在做数值计算时需要平衡计算精度和计算量之间的关系。

另一种求解微分方程的方法是解析求解。但不是所有的微分方程都有解析解的。事实上，大多数的微分方程都没有解析解。对于有些方程，尤其是线性方程，人们总结出一些方法去求解，如级数展开法等等。一般来说，解析求解微分方程的方法是根据方程的特点进行猜测。

对于简谐振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

，我们看到物理量的二次导数负正比于自己。根据对常见函数的了解知道正弦或余弦函数有这样的性质，如

$$\frac{dcost}{dt} = -sint$$

$$\frac{d^2cost}{dt^2} = -\frac{dsint}{dt} = -cost$$

因此当$\omega = 1$时，$x = cost$就是简谐振动方程的解。当$\omega \neq 1$时可以想到

$$x = \cos(\omega t)$$

就是简谐方程的解。对于线性方程，当做变换$x \to Ax$，A 为常数时，方程的形式不变，因此更一般的解为

$$x = A\cos(\omega t)$$

另一方面，当把物理量中的时间做一平移时，对于线性方程也是没有影响的，因此可以进一步将解写为

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

其中为常数ϕ。可以证明此解为简谐振动解的一般形式。对于线性方程可以证明如果找到方程的两个不同的解x_1, x_2，则其和$x_1, +x_2$也是方程的解。由此又可以得到方程一般解的另外一个表达形式

$$x = Asin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

可以证明这个解和前面的解的形式可以相互转换的。

对于解

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

当ωt的变化为2π的整数倍时，体系会重复之前的运动。因此该运动为周期运动。**周期**为$T=\frac{2\pi}{\omega}$。**频率**为$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，$\omega$被称为**圆频率**。$A$为 x 的最大值，称为**振幅**。ϕ称为**初相位**，即初始时刻的相位值。而$\omega t+\phi$称**相位**。

可以看到，在简谐振动的解中圆频率ω是由物理体系的性质所确定的。而振幅 A 和初相位ϕ对于方程而言是任意的。这两个值是由体系的初始状态决定的。如对于线性弹簧而言，它们是由初始位置和初始速度决定的。当方程解用

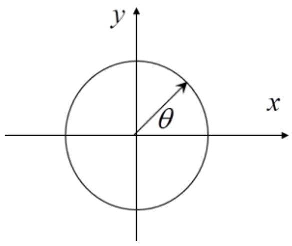
$$x=Asin(\omega t)+B\cos(\omega t)$$

形式时，可以得到

$$A=\frac{v(t=0)}{\omega},\quad B=x(t=0)$$

对于二阶微分方程，其解中会有两个未定常数，而确定这两个常数则需要两个条件。这两个条件可能是初始条件，也可能是边界条件。这种情况可以拓展到 n 阶微分方程。

满足简谐振动方程的体系被称为**简谐振子**。



从数学上看，简谐运动与匀速圆周运动可以联系起来。如图，对于匀速圆周运动，其 xy 坐标为

$$x=rcos(\omega t),\ \ y=rsin(\omega t)$$

其中 r 为圆周运动的半径，ω为角速度。因此可以将圆周运动的半径 r 对应于简谐运动中的振幅；角速度对应于圆频率；相位对应于转角。

第 10 讲 万有引力

哥白尼 Copernicus (1473-1543)在 1543 发表了地球绕太阳转的日心说观点。第谷 Tycho Brahe (1546-1601)通过天文观测积累了大量行星运动的观测数据，极大地支持了哥白尼地心说的理论。第谷的学生开普勒 Johannes Kepler (1571-1630)对于第谷的观测数据做了详细的分析，并总结出了行星运动的三个定律，称为开普勒三定律：

1. 所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上运动。太阳的位置不在轨道中心，而在轨道的两个焦点之一。
2. 在同样的时间里，行星向径在其轨道平面上所扫过的面积相等。
3. 行星公转周期的平方与它同太阳距离的立方成正比。

为解析行星运动，胡克提出了星体之间有相互吸引力，并其大小随着距离变小而变大的想法，但是他没有给出力的数学形式。牛顿根据开普勒三定律以及他对于圆周运动的研究结果给出了物体间都存在相互吸引力，且其大小与物体质量成正比与物体间的间距平方成反比的假设。质点 2 对质点 1 的万有引力具体表示为

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

其中m_1、m_2为两质点质量，$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$为两质点坐标，

$$G = 6.6732 \times 10^{-11} m^3/kg \cdot s^2$$

称为万有引力常数。

行星绕日运动

利用平面极坐标可以得到行星绕太阳运动的方程

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = 0$$

通过解析求解该方程组，可以得到行星绕太阳运动的轨道为圆锥曲线，椭圆是圆锥曲线中的一种。

也可以数值求解方程组

$$m\ddot{x} = -G\frac{Mm}{r^3}x$$

$$m\ddot{y} = -G\frac{Mm}{r^3}y$$

$$\mathrm{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

下列为数值求解的数据和曲线

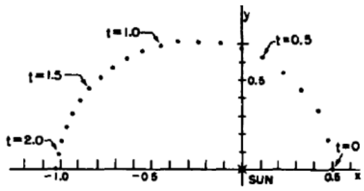


Fig. 9–6. The calculated motion of a planet around the sun.

Table 9–2

Solution of $dv_x/dt = -x/r^3$, $dv_y/dt = -y/r^3$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Interval: $\epsilon = 0.100$

Orbit $v_y = 1.63$ $v_x = 0$ $x = 0.5$ $y = 0$ at $t = 0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0.0	0.500		−4.00	0.000		0.00	0.500	8.000
		−0.200			1.630			
0.1	0.480		−3.68	0.163		−1.25	0.507	7.675
		−0.568			1.505			
0.2	0.423		−2.91	0.313		−2.15	0.526	6.873
		−0.859			1.290			
0.3	0.337		−1.96	0.442		−2.57	0.556	5.824
		−1.055			1.033			
0.4	0.232		−1.11	0.545		−2.62	0.592	4.81
		−1.166			0.771			
0.5	0.115		−0.453	0.622		−2.45	0.633	3.942
		−1.211			0.526			
0.6	−0.006		+0.020	0.675		−2.20	0.675	3.252
		−1.209			0.306			
0.7	−0.127		+0.344	0.706		−1.91	0.717	2.712
		−1.175			0.115			
0.8	−0.245		+0.562	0.718		−1.64	0.758	2.296
		−1.119			−0.049			
0.9	−0.357		+0.705	0.713		−1.41	0.797	1.975
		−1.048			−0.190			
1.0	−0.462		+0.796	0.694		−1.20	0.834	1.723
		−0.968			−0.310			
1.1	−0.559		+0.858	0.663		−1.02	0.867	1.535
		−0.882			−0.412			
1.2	−0.647		+0.90	0.622		−0.86	0.897	1.385
		−0.792			−0.499			
1.3	−0.726		+0.92	0.572		−0.72	0.924	1.267
		−0.700			−0.570			
1.4	−0.796		+0.93	0.515		−0.60	0.948	1.173
		−0.607			−0.630			
1.5	−0.857		+0.94	0.452		−0.50	0.969	1.099
		−0.513			−0.680			
1.6	−0.908		+0.95	0.384		−0.40	0.986	1.043
		−0.418			−0.720			
1.7	−0.950		+0.95	0.312		−0.31	1.000	1.000
		−0.323			−0.751			
1.8	−0.982		+0.95	0.237		−0.23	1.010	0.970
		−0.228			−0.773			
1.9	−1.005		+0.95	0.160		−0.15	1.018	0.948
		−0.113			−0.778			
2.0	−1.018		+0.96	0.081		−0.08	1.021	0.939
		−0.037			−0.796			
2.1	−1.022		+0.95	0.001		0.00	1.022	0.936
		+0.058			−0.796			
2.2	−1.016		+0.96	−0.079		+0.07	1.019	0.945
					−0.789			
2.3								

Crossed x-axis at 2.101 sec, $\therefore$ period $= 4.20$ sec.

$v_x = 0$ at 2.086 sec.

Cross x at 1.022, $\therefore$ semimajor axis $= \frac{1.022 + 0.500}{2} = 0.761$.

$v_y = 0.796$.

Predicted time $\pi(0.761)^{3/2} = \pi(0.663) = 2.082$

潮汐

潮汐现象是沿海地区的一种自然现象，指海水在天体（主要是月球和太阳）引潮力作用下所产生的周期性运动，习惯上把海面垂直方向涨落称为潮汐，而海水在水平方向的流动称为潮流。古代称白天的河海涌水为“潮”，晚上的称为“汐”，合称为“潮汐”。

显然引起潮汐现象的作用力是星体间的万有引力。

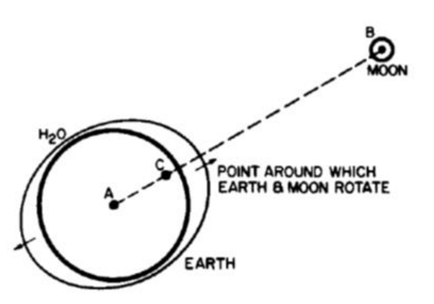


Fig. 7–5. The earth-moon system, with tides.

在地球上的不同位置因为距离太阳或月球的距离不同，万有引力的大小是不同的。同时由于海水具有流动性，因此在月球或太阳的引力作用下向着月球或太阳的方向上流动。同时由于地球在自转，因此对于地球上的海水而已，不同时刻受到的引力方向是不一样的，从而造成了潮汐现象。从这个角度看，似乎一天 应该只有一次潮汐现象。但事实上是有两次。这是因为一方面面地球上对月球或太阳的位置引力最大，其反面引力最小，但是由于地球在自转，海水同时会受到离心力的影响，在反面，万有引力最小，而离心力的影响变得最大，从而也会有潮汐现象。从而导致了一天有两次的潮汐。

月球和太阳同时会造成潮汐，但其引力大小不一样。相对而言月球的影响会比太阳大。另一方面由于有两个引潮力，它们的方向一般情况下不相同，会相互抵消一部分，因此当月球、地球、太阳在不同的相对位置时，和引潮力大小是不一样的。在满月的时候合力最大。

潮汐力作用到海水上，由于海水的流动性从而产生了明显的现象。事实上潮汐力对其他物体也是有影响的，只是表现的不那么明显。例如在西欧核子中心的大强子对撞机的实验上就发现了月球潮汐力的影响。大强子对撞机周长有二十七公里。在其观测数据中，研究人员发现了周期性的涨落，其周期性正好和月球的公转周期相同。细致的数据分析发现这里的涨落就是月球引力的影响。

我们知道月球的公转周期和自转周期是相同的，这就造成了现在在地球上看到的月球总是一面朝着地球，从地球上看不到月球的反面。这也是潮汐力产生的影响。地球由于是距离月球最近的天体，所以地球引力对月球的影响要大过太阳。地球引力可以通过搅动月球内部结构发生摩擦，消耗月球自转的动能，即潮汐力造成内部摩擦力。潮汐摩擦力会导致月球的自转速度逐渐像公转速度靠拢（变快或者变慢），当这两个速度完全一致时，潮汐摩擦力将不再有机会搅动天体内部，因为由于两种转速相同，星体内部的一切结构就处于完美的平衡状态。

海王星的发现

在天文观测中发现木星和土星的轨道并不是完美的椭圆，而是在椭圆轨道上做**进动**，另外也发现天王星的运行行为偏离万有引力定律和牛顿力学的预言。1821 年，布瓦尔根据天王星的观测轨道认为存在另外一个大行星，它的存在影响了天王星的运动。1843 年约翰・柯西・亚当斯计算出会影响天王星运动的第

八颗行星轨道，并将计算结果皇家天文学家乔治•艾里，他问了亚当斯一些计算上的问题，亚当斯虽然草拟了答案但未曾回复。在 1846 年，法国工艺学院的天文学教师奥本•勒维耶，在得不到同行的支持下，以自己的热诚独立完成了海王星位置的推算。但是，在同一年，约翰•赫歇耳也开始拥护以数学的方法去搜寻行星，并说服詹姆斯•查理士着手进行观测。在 1846 年 9 月 23 日晚间，海王星被发现了，与勒维耶预测的位置相距不到 1°，但与亚当斯预测的位置相差 10°。

海王星的发现很强地支持了万有引力定律的成立，并证明牛顿力学是可以用到天体运行上的。

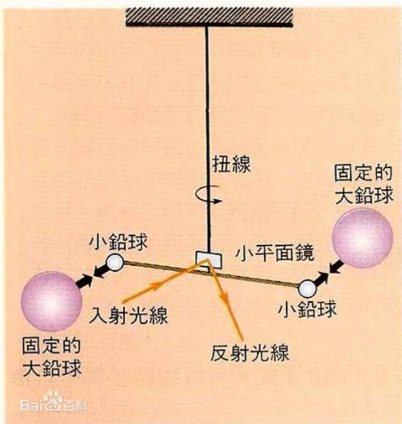
万有引力使得天体系统成形

在宇宙大爆炸之后，物质在爆炸的作用下而分离开来，而万有引力是对抗这种分离的作用力。因为万有引力的存在而使得四散的物质能够汇聚起来形成星体。同时又是在万有引力的作用下使得星体塌缩，导致星体的性质发生变化。

另一方面多个星体能够汇聚在一起形成星系和星系团也是由于万有引力相互作用。

尽管万有引力相对于其他三种相互作用很小，但是强相互作用和弱相互作用是短程相互作用，被束缚在原子核中；而多数物质整体而言是电中性的。因此在大尺度下能起到作用的主要就是万有引力。

万有引力常数的测量



万有引力常数最早是卡文迪许利用扭称进行测量的。扭秤的基本原理是在一根刚性杆的两端连结相距一定高度的两个相同质量的重物，通过秤杆的中心用一扭丝悬挂起来。秤杆可以绕扭丝自由转动。当扭称两端的物体受到横向作用力时，扭称就会偏转。由于对很小的作用力就可以造成扭丝旋转，并且可以利用光放大的方法（即在扭杆上放置镜子，并用光线照射镜子。当镜子有微小偏转时，反射光线在远处就是有较大偏移）观测微小偏转。因此扭称的设计很适合测量微小的作用力。

当测量出万有引力常数后，根据地球半径和地球表面的重力加速度就可以得

到地球的质量。

惯性质量和引力质量

之前我们提到过物体之间存在万有引力，而万有引力的大小与物体的某个性质有关，这个性质可以被称为引力质量。而一个物体受力后会产生加速度，两者之间成正比关系，比例系数被定义为惯性质量，它表征了物体对施加在物体上的力的敏感度。从这两个角度看，惯性质量和引力质量似乎没有什么关系。但是在最早的万有引力定律中，万有引力是与惯性质量成正比的。这给人的感觉是很奇怪的。但是大量的实验表明惯性质量和引力质量似乎真的是一样的。

爱因斯坦在广义相对论中提出了一个假设，即引力质量和惯性质量是一样的，是不可区分的。并由此出发得到了很多推论和预言。对于引力质量和惯性质量的一致性现在还有很多研究人员在进行验证。

在相对论中，万有引力不是瞬时相互作用。物体之间的引力相互作用是以光速传递的。事件的同时性也变成相对的，也就是说某人观测到的同时发生的两件事情在另外一人看来可能并不是同时发生。万有引力本身也表现为时空的弯曲。比较明显的实验是光线在大质量天体附近会发生较大的偏转，从而造成引力透镜相应。在相对论中万有引力对平方反比关系也发生了一定的偏离，而人们一直搞不清楚原因的水星进动现象也由相对论很好的解释了。

并不是最终理论

对于万有引力还存在着不少未经解决的问题。如引力场的量子理论应该是什么样的？为什么万有引力相对于其他相互作用这么弱？在小尺度下万有引力定律是否可以修正从而能看到额外维空间？在很大尺度下万有引力到底应该是什么样的？暗物质和暗能量到底是什么？能否观测到引力波？黑洞的性质及黑洞内部是什么样的？

课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt. 7，9.5，9.6，21

《新概念物理教程：力学》：第六章第 1 节，第七章