抽象代数课程教学大纲

课程基本信息（Course Information）					
课程代码（Course Code）	MA204	*学时（Credit Hours）	64	*学分（Credits）	4
*课程名称（Course Name）	抽象代数 Abstract Algebra				
课程性质 (Course Type)	必修课				
授课对象（Audience）	数学与应用数学专业本科生；信息与计算科学专业本科生				
授课语言 (Language of Instruction)	中文 （如果需要，亦可用英文教学）				
*开课院系（School）	数学系				
先修课程（Prerequisite）	数学分析，高等代数 (包括多项式理论和空间解析几何)，初等数论				
授课教师（Instructor）	章璞	课程网址 (Course Webpage)	http://math.sjtu.edu.cn/course/cxds/index.htm		
*课程简介（Description）	“抽象代数”(通常又称为“近世代数”)是现代数学的重要基础之一，并且在计算机科学、信息与通讯、物理、化学等领域有广泛的应用。它是高等学校数学类各专业的必修课。这门课程研究群、环、域这三种基本的代数结构的结构理论(由于课程的时间所限，作为本科生的抽象代数课程，一般不涉及群和环的表示理论。群表示论是本科生的另一课程；而模论一般是研究生阶段的基础课程)。主要内容包括群的基本结构理论、置换群、群在集合上的作用及其在计数中的应用、Sylow 定理、有限生成 Abel 群的结构、可解群的性质；环的基本结构、中国剩余定理及其应用、环的因子分解理论、多项式环；域的扩张理论、有限域及其应用、基本的 Galois 理论及应用。通过这门课的教学，要使学生掌握抽象代数的基本理论与方法，结合具体的例子理解抽象代数中的数学思想和思维方法，使学生的抽象思维能力得到系统的训练和提高，为进一步学习数学和其它学科奠定坚实的代数学基础。				
*课程简介（Description）	Abstract Algebra (also called Modern Algebra) is an important basis of modern mathematics, and is widely used, such as in computer science, information and communication, physics, and chemistry. The course Abstract Algebra is one of the main required courses for undergraduates in mathematics. It studies the fundamental algebraic structures of groups, rings, and fields (for the limited time, as a course for undergraduates, it will not deal with the representation theory of groups and rings. In fact, Representation				

	Theory of Groups is another course for undergraduates; and Module Theory will be a basic course of graduates). The main contents include the basic structural theory of groups, permutation groups, groups' actions on sets and applications of these actions, Sylow Theorems, the structure of finitely generated abelian groups, properties of solvable groups; the basic structures of rings, the Chinese Remainder with applications, the properties of uniquely factorized domains, and polynomial rings; the extensions of fields, finite fields with applications; and the basic Galois theory with applications. The aim of the course is to make students to acquire the fundamental theories and tools; to train and strengthen their interest and ability of abstract thinking, such that a solid foundation in algebra will be built for their further studies. We emphasize that it is important to understand Abstract Algebras via concrete examples and backgrounds; and also we stress the applications of ideals and tools in this course.
课程教学大纲（course syllabus）	
*学习目标 (Learning Outcomes)	**对应目标体系的代码的标注方法：**在以下课程教学大纲中，我们在每一章题目后的括号中标注适用于该章每一节的代码；只有当某一节需要特别标注新的代码时，我们才会在该节后的括号中重新加以标注。 **第 1 章 群论**（28 学时，对应代码 A4, A5，B1, B2, B3, C1, C2, C4） 1.1 群的定义（2 学时，对应代码 A2, A3） 课程简介(历史演变与研究对象，特点与重要性，要求与学习方法提示） 对称性与群概念的引入（GL(n, C)，变换“群”，美的基本要素，怎样数学地描述现实世界中对称性？引出群的观念） 什么是群；简单性质（单位元与逆元的唯一性；左右消去律；穿脱原理）；举例；稍进一步的性质（单边定义；除法定义；有限半群成群的充要条件） 1.2 子群与 Lagrange 定理（4 学时） 子群的定义、性质、判定、例子、构造 (两个子群的积成为子群的条件) 集合上的二元关系、等价关系与划分 利用等价关系导出陪集分解和 Lagrange 定理；Lagrange 定理的应用举例：元素的阶及计算；两子群积集的计数公式. 共轭关系、中心、中心化子、共轭元的个数；类方程及其应用：p-群有非平凡的中心；p 平方阶群是 Abel 群 1.3 循环群（2 学时）

	群同态和同构及其意义；举例 固定阶循环群在同构意义下的唯一性； 有限循环群的固定阶子群在通常意义下的唯一性； 循环群的生成元和自同构群 1.4 正规子群、商群、群同态基本定理（2 学时） 正规子群的定义与例子； 商群的构造；为什么要商群？ 同态基本定理：表述、意义、证明和应用（子群对应定理和两个同构定理）； 应用举例：内自同构群同构于 G/Z(G). 1.5 置换群（2 学时） 变换群的重要性；Cayley 定理； S_n 中元素的表达、奇偶性、阶；对称群与交错群的生成系；置换的型；共轭类的划分；有限单群；A_n （n>4）的单性； 举例：S_n 的正规子群；S_4/K_4 同构于 S_3. 1.6 群在集合上的作用及其应用（3 学时，对应代码 A2, A3） 群作用的思想；两种定义的等价性；作用的核； 三种典型的作用及其核； 轨道公式；举例 Burnside 引理在不同领域计数中的应用（通常选讲项链问题） 1.7 Sylow 定理（3 学时） 有限群 Sylow I, II, III 的表述与证明（作为群作用的应用）； 举例：利用 Sylow 定理判断有限群的非单性；确定阶数最小的单的非 Abel 群，即 A_5 1.8 群的直积（2 学时） 外直积与内直积的统一；直积的等价刻画； Z_n X Z_m = Z_{nm} 当且仅当(n, m)=1；举例：5X 7 X 13 阶群是循环群 1.11 群的生成元与定义关系（2 学时） 自由群的概念；自由群的商群可表达任一群；由此导出用生成元和定义关系表达群；举例：二面体群生成元和定义关系；四元数群的生成元和定义关系；有限生成自由 Abel 群的秩. 1.12 有限生成 Abel 群（2 学时）

归结为有限生成自由 Abel 群（秩）与有限 Abel 群；
有限 Abel 群是其 Sylow 子群的直和；
素数幂 p^n 阶 Abel 群的同构类与数 n 的划分之间的一一对应；
会用初等因子和不变因子对有限 Abel 群分类；
举例：求互不同构的 1500 阶 Abel 群；
有限 Abel 群的 Lagrange 定理之逆成立.

1.13　小阶群的结构（2 学时）

2p 阶非 Abel 群；8 阶和 12 阶非 Abel 群；确定 1 至 15 阶群（列表）.

1.14 可解群 (2 学时)

换位子群与商群的可换性之间的关系;可解群的定义和基本性质；
举例：S_n, A_n, D_n; p-群；pq 阶群；可解群的等价刻画

大专业布置 (对应目标体系代码 B4，C3**)**

期中考试 (不占用课时，对应代码 A4，B1, B2, B3, B8, C3**)**

第 2 章 环论（12 学时，对应代码 A4, A5，B1, B2, B3, C1, C2, C4）

期中试卷点评（对应 B5, B7, B8）

2.1　环的基本概念 （2 学时）

定义；名词与简单性质;（交换环，无零因子环，整环，除环，域）
举例（数环、剩余类环、矩阵环、加群的自同态环、群环、四元数体）

2.2　环同态基本定理（2 学时）

理想的构造；主理想整环（PID）；举例：除环上的全矩阵环是单环；
商环的构造；环同态基本定理的意义（强调与群论的平行和区别）

2.3　同态基本定理的应用（1 学时）

无零因子环的特征；整环的商域

2.4　中国剩余定理在“秘密共享”中的应用（1 学时, 对应代码 A1, A3）

2.5　极大理想与素理想（1 学时）

定义及关系；意义：构造域及整环
PID 中的极大理想和素理想

	Zorn 引理；极大理想和素理想的存在性 2.5　唯一因子分解整环（UFD）（2 学时） 不可约元与素元；UFD 的定义；非 UFD 的例子 UFD 的等价刻画；PID 是 UFD 2.6　Euclid 整环（ED）（1 学时） 定义与例子；环，整环，UFD, PID, ED，域之间的关系图 2.7　多项式环（2 学时） 简略回顾及推广高等代数中多项式部分（包括 Eisenstein 不可约性判别法）; Gauss 定理：UFD 上的多项式环仍是 UFD; 域上多元多项式环不是主理想整环. **第 3 章 域论**（14 学时，对应目标体系代码 A4, A5，B1, B2, B3, C1, C2, C4） 3.1　域的扩张（3 学时） 素域 有限扩域维数的望远镜公式 域扩张的方法（归结为单扩域） 单扩域的结构；举例 有限扩域与代数扩域及其关系 3.2　尺规作图问题（1 学时，对应目标体系代码 A1, A2, A3, C3） 3.3 分裂域　(2 学时） 定义与意义；存在性 同构延拓定理及其证明 利用同构延拓定理证明分裂域的唯一性 分裂域的 Galois 群的阶 3.4　有限域（4 学时） 结构定理 具体构造举例 有限域上的不可约多项式 提及：Wedderburn 定理（有限体是域，不作证明） 举例：有限域上的一般线性群和特殊线性群

3.5　可分扩域（2 学时）

定义；完全域；不可分扩域的存在性；“大部分代数扩域”是可分的
Artin 本原性定理：有限可分扩域是单扩域

3.6　正规扩域（2 学时）

定义；有限正规扩域 = 多项式的分裂域
有限 Galois 扩域的定义；从而有限 Galois 扩域 = 可分多项式的分裂域
为什么要有限 Galois 扩域： |Gal（E/F）| = [E:F]

大专业布置 (对应代码 B4，C3**)**

第 4 章 Galois 理论（8 学时，对应代码 A4, A5，B1, B2, B3, C1, C2, C4）

4.1　Galois 理论的基本定理（4 学时）

群和域的反序对应关系；Artin 引理；正规性引理
Galois 理论的基本定理及其证明
举例： X^-2 在有理数域 Q 上的分裂域 E； Galois 群 Gal(E/Q) =S_3； E/Q 的中间域与 S_3 的子群之间的反序一一对应.

4.2　方程的 Galois 群（2 学时）

方程的 Galois 群作为根集上的(可迁)置换群
有理数域上只有两个非实的复根的素数次不可约多项式的 Galois 群
纯粹方程的 Galois 群
Galois 反问题

4.3　代数方程的根式可解性（2 学时，对应代码 A1, A2, A3, C3）

根式可解的含义
Lagrange 预解式
Galois Theorem (利用 Galois 理论的基本定理怎样将代数方程的根式可解性归结为其 Galois 群的可解性）

机动学时、或课程总结及进一步学习推荐（2 学时，对应代码 A1, A2, A3, C3）

	教学内容	学时	教学方式	作业及要求	基本要求	考查方式
*教学内容、进度安排及要求 (Class Schedule &Requirements)	群的基本结构理论	10	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	置换群	2	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	群在集合上作用及应用（Burnside 引理及项链问题）	3	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	Sylow 定理	3	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	直积、定义关系、有限生成 Abel 群、小阶群	8	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	可解群	2	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	大作业	0	课堂布置	大作业	完成	面谈
	期中考试及点评	0	课外安排	思考	完成	面谈
	环的基本概念	4	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	特征、商域、中国剩余定理、极大理想与素理想	3	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	各类整环	5	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	域扩张理论	6	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	有限域及其应用	4	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
	可分与正规扩张	4	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业

大作业	0	课堂布置	大作业	完成	面谈
Galois 理论的基本定理	4	课堂讲授与讨论	预习、听课、小结、习题	预习、听课、小结、习题	作业
Galois 群的计算	2	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
方程的根式可解性	2	课堂讲授与讨论	布置作业	预习、听课、小结、习题	作业
机动、总结及展望	2	课堂讨论	思考	完成	面谈

*考核方式 (Grading)	最终成绩由平时作业、大作业、期中与期末考试成绩组合而成。各部分所占比例如下： 平时作业与大作业：10% 考试：期中 40%，期末 50%
*教材或参考资料 (Textbooks & Other Materials)	**教材：**《近世代数引论》,冯克勤、李尚志、章璞，中国科学技术大学出版社，2009（第 3 版）. (“十一五”国家重点图书；“中国科学院指定考研参考书") **参考资料：** 1. 《代数学引论》，聂灵沼、丁石孙，高等教育出版社，1993. 2. 《伽罗瓦理论-天才的激情》，章璞，现代数学基础 37，高等教育出版社，2013. 3. 《近世代数导引》，刘绍学，章璞，数学基础课程系列简明教材，高等教育出版社，2011. 4. 《近世代数三百题》，冯克勤、章璞，数学类专业学习辅导丛书,高等教育出版社，2010. 5. Basic Algebra I, Nathan Jacobson, W.H.Freman and Company, 1974. 6. Contemporary Abstract Algebra，J.A. Gallian, Heath and Company, 1994. 7. Algebra, M. Artin, Pearson Education, Inc. 1991. 8. Algebra, I. M. Isaacs, Wadworth Inc. 1994. 9. Modern Algebra with Applications, W. J. Gilbert, Wiley-Int., New York, 1976. 10. 《应用近世代数》，胡冠章，清华大学出版社，2002（第 2 版）
其它 （More）	本课程还有不同的版本（例如二专、工科院系用近世代数等）。这个系列课程教学团队人员主要有以下老师 (按姓氏为序)：崔振,邓大萌,高云,姜翠波,蒋启芬,励建书,李吉有,李红泽,刘春雷,麻志浩,马俊,司梅,武同锁,吴耀琨，张晓东,张跃辉,周钢等
备注 （Notes）	与本课程关联较多的后续课程有：群与代数表示论，编码与密码，图与网络，代数数论，代数拓扑，李群与李代数，代数几何等

备注说明： 1．带*内容为必填项。

2．课程简介字数为 300-500 字；课程大纲以表述清楚教学安排为宜，字数不限。