

# 致远学院《线性代数》课程大纲（2015）

## 一、课程简介

课程名称： 线性代数           学时/学分： 80/5

先修课程： 无

面向对象： 致远学院本科生

**教学目标：**本课程是为致远学院（化学/生物）开设的线性代数基础课程，包含线性代数的基本内容。通过本课程的教学，使学生掌握线性代数与多项式的基本理论、思想与方法，使学生的计算能力和抽象思维能力得到系统的训练和提高，为将来进一步学习其它专业课程奠定坚实的代数基础。在教学过程中既强调一定的抽象性，又特别注意结合具体的应用例子来理解代数学的数学思想和思维方法，注意介绍本课程与其他学科的联系，以及介绍最新的科研成果以开阔同学的视野。

**主要内容：**多项式理论；行列式的性质与计算技巧；矩阵的性质：等价标准型；解线性方程组；矩阵的相似标准形与特征值、特征向量；二次型与矩阵的合同；Schmidt 正交化；线性空间；线性变换。

## 二、教学内容

### 第一章 数环上的矩阵与 Gauss 消元法

**主要内容：**解线性方程组的高斯消元法与矩阵的运算(加法、数乘、转置、乘法、可逆矩阵的求逆)。

**重点与难点：**矩阵的乘法；初等矩阵

### 第二章 行列式

**主要内容：**行列式的定义、性质以及求行列式

**重点与难点：**降阶计算以及升阶计算

### 第三章 一元多项式理论

**主要内容：** 多项式

**重点与难点：** 互素与整除之间的制约关系

### 第四章 矩阵的相似对角化

**主要内容：** 特征值与特征向量；方阵可相似对角化的判定

**重点与难点：** 特征多项式；特征值与特征子空间

### 第五章 二次型

**主要内容：** 实二次型与实对称矩阵的对应；化二次型为标准型；正定矩阵与正定二次型

**重点与难点：** 正定二次型

## 第六章 线性空间

主要内容：基与坐标；欧氏空间与 Schmidt 正交化过程；酉空间

重点与难点：欧氏空间与 Schmidt 正交化过程；酉空间

## 第七章 线性变换

主要内容：线性变换与矩阵的对应；投影变换与正交变换；正交变换与正交矩阵；不变子空间

重点与难点：以上均为重点。难点很多，不再一一论述

### 三、教学进度安排

#### 第一章. 数环上的矩阵与 Gauss 消元法(19 课时)

1.1. 数环与数域（定义及例子）；利用 Gauss 消元（即初等行变换）法解一般线性方程组（有解的判断；求解。只介绍方法，不涉及秩的概念）；矩阵概念以及线性方程组的矩阵表达；方程组的 Gauss 消元以及矩阵的初等行变换比较；矩阵的标准阶梯型（2 学时）

1.2. 利用行、列初等变换矩阵的标准型；矩阵的运算（加法、数乘、乘法、转置、\*运算）：定义、实例及性质；初等行、列变换与初等矩阵。（4 学时）

1.3. 方矩阵的可逆性判断（标准型）与逆矩阵的求法（Gauss 消元法）（2 学时）

1.4. 向量：矢量的简单介绍（鼓励同学自学有关内容）；矢量与向量；与矩阵的关系；矩阵的行、列向量组；由列向量组成的线性空间概念及例子（ $F^{n \times 1}$ ； $AX=0$  的解空间； $A$  的列向量张成的线性空间）；向量组的线性相（无）关性与极大无关组（4 学时）

1.5. 向量组的秩与矩阵的秩（行秩等于列秩）（2 学时）

1.6. 基础解系与方程组的通解（2 学时）

习题课（3 学时）

#### 第二章. 行列式（7 学时）

2.1. 行列式的定义（利用关于行的三条性质给出定义）与行列式的性质（2 学时）

2.2. 与行列式的计算举例（本部分内容与 Gauss 消元法有密切联系）（2 学时）

2.3. 矢量的点积、叉积与混合积；行列式应用举例（面积与体积的计算）（2 学时）

2.4. Cramer 法则介绍（1 学时）

### 第三章. 多项式理论（共 8 学时）

3.1 带余除法、整除（1）

3.2 gcd 与 lcm: 互素与整除（2）

3.3 素多项式与不可约多项式；因式分解唯一性定理（2）

3.4 复数域、实数域上的不可约多项式（1）

3.5 整系数多项式的全部有理根的求法；Gauss 引理与有理数域上的不可约多项式；Eisenstein 判别法（2）

3.6 多元多项式与对称多项式（介绍或者自学）

### 第四章. 矩阵的相似对角化(16 学时)

4.1 相似于对角阵的矩阵的判定；特征值与特征向量：计算与性质（2 学时）

4.2 特征子空间；特征多项式的性质（矩阵的迹等于特征值之和；矩阵的行列式等于特征值之积； $f(A)$  的全部特征值为  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 。）（2 学时）

4.3 矩阵的化零多项式：Hamilton-Cayley 定理以及应用举例；（2 学时）

4.4 Jordan 标准型介绍；最小多项式(自学)

4.5 欧氏空间  $\mathbf{R}^n$  与酉空间  $\mathbf{C}^n$ ：内积，长度，夹角；Cauchy 不等式及其证明；Schmidt 正交化；最小二乘法（2 学时）

4.6 Schur 引理；正交矩阵（酉矩阵）与极大标准正交向量组；实对称阵与 Hermite 阵。正规阵与酉相似；实对称矩阵正交相似于实对角阵（6 学时）

4.7 习题课（2 学时）

### 第五章. 二次型（共 6 学时）

5.1 二次型与双线性型（2）

5.2 正定二次型：正定矩阵的描述与应用；二次型与有限维欧式空间上内积的一致性；惯性定理介绍（4）

### 第六章. 线性空间（共 12 学时）

6.1 定义及例子；基、维数与坐标：强调同一个实空间上{基全体}与{可逆矩阵}的一一对应；基变换下的相应坐标变换（4）

6.2 子空间的交与和：维数公式；子空间的生成问题（3）

6.3 抽象欧氏空间：强调同一个实空间上{内积}与{正定矩阵}之间的一一对应（3）

6.4 线性空间与欧氏空间的同构（2）

6.5 U-空间：标准正交基与酉矩阵（正交矩阵）（2）

## 第七章. 线性变换 (共 12 学时)

7.1 线性变换的定义、例子及性质; (2)

7.2 线性变换与方阵的一一对应; 可逆线性变换与可逆矩阵的一一对应(代数同构); 实空间上的{投影变换} (projection) 与{满足  $A^2=A$  的实对称矩阵  $A$ }之间的一一对应 (5)

7.3 不变子空间: 值域、核与根子空间; 根子空间的直和分解 (5)

7.4 正交变换与正交矩阵: 代数意义与几何意义 (2)

## 四、课程考核及说明

(1) 20%为平时成绩

20%为大作业(小论文)

60%为考试成绩

(2) 总课时中含大约 12-16 学时习题课; 另有若干次答疑(一般放在第 8 周后的周六或者周日进行)。

## 五、教材与参考书

**教材:** 蓝一中编: 高等代数简明教程(以上册为主, 同时添加部分下册内容)

### 参考书:

- 陆少华等编著《大学代数》, 上海交通大学出版社, 2001 年 4 月第一版
- 北大王萼芳 石生明 编《高等代数》(第三版)
- Gilbert Strong. Linear Algebra and its Applications. 4ed 2006.  
械工业出版社)