最近网上讨论文科生学数学有什么用。2011年10月20日，一封长达五页纸的特别来信，呈现在了华中科大校长面前。这封信的作者，是新闻学院2011级姓朱的学生，信中阐述了新闻学院学生不应该修习数学的理由。

小朱在信中写道："学校对新闻专业修数学的要求，让我很失落。据我所知，其他大学的新闻专业，是不学数学的……文科注重的是学生抽象思维的培养，一味的强调全面发展有时反而会起到负面作用"。小朱还问："文科生学数学，有什么用处呢？就算要用，也往往是在用之前，就被遗忘和荒废了"。

在小朱看来，一个人兴趣背后往往隐藏着他最优异的潜能，追求全面发展只会导致精力分散，走向平庸。据小朱称，包括他自己在内，文科有一批学生不想学数学。

我们没有别的看法，只能说：不学数学也可以写小说，像许多现有作家那样；但学了数学，小说写得更好，像托尔斯泰以及果戈理（后者在《外套》中用了非欧几何、非线性科学、混沌、时空说）。希望他们的解读对文科生的讨论有益。但即使要学，难度要区别，例如只学序言以及第一场的等式微积分。

基本公式的人文解读：左边是函数值总变化，来自右边函数值小变化的积累，托尔斯泰称前者为积分，后者为微分的积累，用来解读《战争与和平》：

“只有采取无限小的观察单位–历史的微分，并运用积分的方法得到这些无限小的总和，我们才能得到问题的答案–历史的规律．正是这种微积分，纠正了人类由于只观察个别单位所不能不犯下的和无法避免的错误。”最后一句凸显了微积分对人类何用。他反对历史学家的夸张，将历史事件归结为个人行为。

微积分降到最低点

——两个算术等式

linq@lsec.cc.ac.cn

http://blog.sciencenet.cn/u/林群

摘要：微积分重新洗牌

序幕：x^2的微积分（有等式）

第一篇：多项式的微积分（有等式）

第二篇：显式函数的微积分（仿等式）

第三篇：一般函数的微积分（不等式）

摘要　模仿笛卡尔的模式

下降：四面体的重心→三角形的→ 线段的

上升：四面体的重心←三角形的←线段的

微积分重新洗牌：将它降到最低点(算术等式), 做到水落石出，用看不用想. 反过来，有了最低资本(等式)，就顺水推舟，通过仿效不用想，又由最低点升到最高点(仿等式). 这个模式，不仅进入微积分的门槛最低，而且到达最高点的成本最小.

微积分关注着函数的导数和积分。它们有精确的公式（或等式）吗？对多项式是肯定的.

序幕： x^2的微积分（有等式）

导数

微积分之首是导数，擒贼先擒王。导数是什么?

先看整数除法

$$\frac{91}{10} = 9 + 0.1$$

若四舍五入，右边剩下整数9，简化了除法。

回到x^2，它的导数就是做除法

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=?$$

简单代数即得等式：对给定x与任一h

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h$$

这等式是纯代数，无论h有多大．当你要求$h\to 0$（瞬时速度），左边变成除法，但右边变成加法$2x+0$，称为x^2的导数，记$(x^2)'=2x$。

有了导数，便有定规求导数的积分(要多说几句)

先看一批数，$\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}, \cdots, \frac{m}{m+1}$. 将它们相加

$$2\left(\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+1}+\cdots+\frac{m}{m+1}\right)\frac{1}{m+1}=1-\frac{1}{m+1}$$

当你要求$m \to \infty$，左边变成了项数无限的加法

（$\because m \to \infty$），但右边变成一项 1.

访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 11 页 49
返回
全屏显示
关闭
退出

推广：前面在给定的x，有了导数$2x$. 现在，在区间$[a,b]$上放一批节点$x_0, x_1, \cdots, x_m$, (相邻节点的距离$h = \frac{b-a}{m+1}$)，那么就有一批导数$2x_0, 2x_1, \cdots, 2x_m$. 将它们相加

$$(2x_0 + 2x_1 + \cdots + 2x_n) =?$$

由反推法

$$
\begin{aligned}
b^2 - a^2 & \\
&= (x_m + h)^2 - x_m^2 + \cdots + (x_1 + h)^2 - x_1^2 \\
&\quad + (x_0 + h)^2 - x_0^2 \\
&= 2x_m h + h^2 + \cdots + 2x_1 h + h^2 + 2x_0 h + h^2 \\
&= 2x_m h + \cdots + 2x_1 h + 2x_0 h + (m+1)h^2
\end{aligned}
$$

得导数的加法公式：对任一h

$$(2x_0 + 2x_1 + \cdots + 2x_m)h = b^2 - a^2 + (a-b)h$$

这等式（给出精确公式）是纯代数，无论m或h有多大．当你要求$m \to \infty$或$h \to 0$，左边变成了项数无限的加法（$\because m \to \infty$），称为导数的积分，记$\int_a^b 2xdx$，但右边变成一项$b^2 - a^2 + 0$，所以$\int_a^b 2xdx = b^2 - a^2$.

不用想，只用看上面两个算术等式. 它们等式达到了精确，而不等式太烦，又不精确. 所以，首先追求等式或精确公式. 这是首要也是最困难的任务. 幸好，对于最重要的一类函数，多项式，能达到等式. 这是微积分的最亮点，照亮了其它部分，并作为其它部分的仿效榜样.它们来之不易，必须倍加珍惜!

简言之，x^2是起点，两条算术等式是最低的资本或门槛。但是够了: 如果你懂得它们，也就懂得全书，一本万利，所以这两条等式怎么强调也不过分，忘掉一切也不可忘掉这两条等式。它们是本书唯一要用心之处，必须渗入血液和骨头。做到用看不用想。

上面只是x^2(有等式)，下面顺水推舟，将它仿效到多项式x^n（保持等式）甚或非多项式。但只要有了多项式的微积分，对中学就够了，这就解了当务之急！

一开始知道这一点就够了，少则多！知足常乐，高中生到此止步。

序幕(对高中生)落下，大戏开始(文科大学生)

第一场： x^n的微积分（有等式）

将上面故事重演，只换角色，由x^2仿效到x^n，举一反三，顺水推舟。

x^3 的除法等式：对给定x与任一h

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + (3x+h)h$$

这一步只是纯代数。但当$h \to 0$(求速度)，答案简化到点态导数$3x^2$ 。

导数 $3x^2$ 的加法等式

$$(3x_0^2+3x_1^2+\cdots+3x_m^2)h = b^3-a^3+\frac{1}{2}[3(b^2-a^2)+(a-b)h]h$$

这一步只是纯代数。但当$m \to \infty$(求面积)或$h \to 0$，答案简化到$b^3 - a^3$,记

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} 3x^2 \mathrm{d}x = x^3|_a^b = b^3 - a^3$$

还有

$$\left(x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_m^3\right) h = \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) + \frac{1}{2}\left(a^3 - b^3\right) h - \frac{3}{12}\left(a^2 - b^2\right) h^2$$

$$\left(x_0^4 + x_1^4 + \cdots + x_m^4\right) h = \frac{1}{5}\left(b^5 - a^5\right) + \frac{1}{2}\left(a^4 - b^4\right) h - \frac{4}{12}\left(a^3 - b^3\right) h^2 + \frac{1}{30}(a - b) h^4$$

$$\left(x_0^5 + x_1^5 + \cdots + x_m^5\right) h = \frac{1}{6}\left(b^6 - a^6\right) + \frac{1}{2}\left(a^5 - b^5\right) h - \frac{5}{12}\left(a^4 - b^4\right) h^2 + \frac{1}{12}\left(a^2 - b^2\right) h^4$$

$$
\begin{aligned}
\left(x_0^6 + x_1^6 + \cdots + x_m^6\right) h = {} & \frac{1}{7}\left(b^7 - a^7\right) + \frac{1}{2}\left(a^6 - b^6\right) h \\
& - \frac{6}{12}\left(a^5 - b^5\right) h^2 + \frac{1}{6}\left(a^3 - b^3\right) h^4 \\
& - \frac{1}{42}\left(a - b\right) h^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(x_0^7 + x_1^7 + \cdots + x_m^7\right) h = {} & \frac{1}{8}\left(b^8 - a^8\right) + \frac{1}{2}\left(a^7 - b^7\right) h \\
& - \frac{7}{12}\left(a^6 - b^6\right) h^2 + \frac{7}{24}\left(a^4 - b^4\right) h^4 \\
& - \frac{1}{12}\left(a^2 - b^2\right) h^6
\end{aligned}
$$

同样，当$m \to \infty$或$h \to 0$，答案简化到

$$\int_a^b x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

x^2 或 x^n 是酵母，或大爆炸的起点。进一步发酵或爆炸如下

第二场：显式函数的微积分(仿等式)

顺水推舟，将第一场的推理模式由多项式复制到其它显式函数（后者定义区间用不等式刻画），抄不动再改道。抄也是功夫，抄欧几里得、牛顿···天下文章一大抄，看你会抄不会抄。

第一幕 $\sqrt{x}$ 的微积分（参照 x^2，模仿不用想）

导数

由x^2抄到$\sqrt{x}$，有什么改变？求导数还是做除法

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=?$$

跟多项式情形相比，不同的是，$\sqrt{x}$的定义区间需要不等式$x>0$与$x+h\geq 0$，或简单地

$$x \geqslant a > 0, x+h \geqslant a-|h| \geqslant 0 \text{ 或} |h| \leq a$$

（先天不足）。由简单的代数

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

现在抄前面有过的等式

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+(3x+h)h$$

也分解成两项，第一项不含h，即令$h=0$所得的导数如今是$\frac{1}{2\sqrt{x}}$，但有余项如下

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+[\frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})^2}]h$$

余项系数记为$[\cdots]$，不再是h的多项式，但h出现在分母中，如何脱掉？幸亏，由定义区间，$x \geqslant a, x+h \geqslant 0$，得出分母为正：

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})^2 \geq 2a\sqrt{a} > 0$$

而不是小除数，或简单地

$$\left|\frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})^2}\right| \leqslant \frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

将分母的h脱掉了！所以余项一样可灭，得导数$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

有了导数，并有定规求导数的积分

在区间$[a,b]$上放一批节点$x_0, x_1, \cdots, x_m$ (相邻节点的距离$h = \frac{b-a}{m+1}$)，那么就有一批导数$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{x_1}}, \cdots \frac{1}{2\sqrt{x_m}}$。由反推法

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{x_m}}h + \cdots + \frac{1}{2\sqrt{x_1}}h + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}h$$

$$+([\cdots]_{x=x_m} + \cdots + [\cdots]_{x=x_1} + [\cdots]_{x=x_0})h^2$$

得$\frac{1}{2\sqrt{x}}$的加法等式

$$(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}+\frac{1}{2\sqrt{x_1}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{x_m}})h=\sqrt{b}-\sqrt{a}$$

$$-\frac{1}{m+1}([\cdots]_{x=x_m}+\cdots+[\cdots]_{x=x_1}+[\cdots]_{x=x_0})(b-a)h$$

其中余项有正的分母，$2a\sqrt{a}$：

$$\left|\frac{1}{m+1}([\cdots]_{x=x_m}+\cdots+[\cdots]_{x=x_1}+[\cdots]_{x=x_0})(b-a)h\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{a}}(b-a)h=Ch$$

当分割加密（m增大或h减小），分解式

$$(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}+\frac{1}{2\sqrt{x_1}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{x_m}})h=\sqrt{b}-\sqrt{a}$$

$$-\frac{1}{m+1}([\cdots]_{x=x_m}+\cdots+[\cdots]_{x=x_1}+[\cdots]_{x=x_0})(b-a)h$$

左边变成了项数无限的加法（当$m\to\infty$），称为$\frac{1}{2\sqrt{x}}$的积分，记$\int_a^b\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$，但右边变成一项$\sqrt{b}-\sqrt{a}$，所以有等式

$$\int_a^b\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\,\Big|_a^b=\sqrt{b}-\sqrt{a}$$

又将上述推理模式照抄到

第二幕：$\frac{1}{x}$的微积分

第三幕：$\sin x$的微积分

共同点

将三个显式函数$\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$统一记为一个函数$f(x)$，定义在$[x, x+h]$上。有区间导数$f'(x)$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + [\cdots], |[\cdots]| \leqslant C|h|$$

有了导数，便有定规（首次用于$f(x)=x^2$），求导数的积分：

在区间$[a,b]$上放一批节点$x_0,x_1,\cdots,x_m$（相邻节点的距离$h=\frac{b-a}{m+1}$），那么就有一批导数$f'(x_0),f'(x_1),\cdots,f'(x_m)$. 由反推法

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(a)=&f(x_m+h)-f(x_m)+\cdots\\
&+f(x_1+h)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_0)\\
&=f'(x_m)h+\cdots+f'(x_1)h+f'(x_0)h\\
&+([\cdots]_{x=x_m}+\cdots+[\cdots]_{x=x_1}+[\cdots]_{x=x_0})h
\end{aligned}
$$

得$f'(x)$的加法等式

$$
\begin{aligned}
&(f'(x_0)+f'(x_1)+\cdots+f'(x_m))h\\
=&f(b)-f(a)-([\cdots]_{x=x_m}+\cdots+[\cdots]_{x=x_1}+[\cdots]_{x=x_0})h
\end{aligned}
$$

余项

$$
\begin{aligned}
&\left|([\cdots]_{x=x_m}+\cdots+[\cdots]_{x=x_1}+[\cdots]_{x=x_0})h\right|\\
\leqslant& C(m+1)h^2=C(b-a)h
\end{aligned}
$$

其中$h>0$是剖分长度。这步只是纯代数。

下步，当m增大或h减小，上式

$$(f'(x_0)+f'(x_1)+\cdots+f'(x_m))h$$

$$=f(b)-f(a)-([\cdots]_{x=x_m}+\cdots+[\cdots]_{x=x_1}+[\cdots]_{x=x_0})h$$

左边变成了项数无限的加法（当$m\to\infty$），称为$f'(x)$的积分，记$\int_a^b f'(x)dx$，但右边变成一项，$f(b)-f(a)$，所以有等式

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$$

抄好了！所以天下文章一大抄，看你会抄不会抄。

注4 当剖分变成不均匀，有不同的长度$h_0, h_1, \ldots, h_m$（此即黎曼积和它只需计算$f'(x)$在结点上的值，无需在其它点），则不等式对$h = \max h_k$成立。

等价的，但更省符号, 将它们合一起

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right| \leqslant C\,|h|$$

$$|\sum_{k=0}^{n}[\frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}-f'(x_k)]\,h|$$

$$=|\sum_{k=0}^{n}f'(x_k)h-(f(b)-f(a))| \leqslant Ch$$

其中常数C与x无关.

到此，看到本书的解读模式：穿衣服与脱衣服，即首先由裸身x^2开始，穿上x^n的衣服，再穿上$\sqrt{x}, \frac{1}{x}, \sin x$的衣服，最后穿成$f(x)$．反之，由$f(x)$脱到$\sqrt{x}, \frac{1}{x}, \sin x$，直至露出裸身$x^2$.

第四幕 初等函数的微积分

所谓初等函数，无非少数显式函数，如$x, \sqrt{x}, \frac{1}{x}, \sin x$,的复合. 这些显式函数满足上述不等式，由此可导出它们的复合，即初等函数，也满足前述不等式，推导略。

第三场：　隐式函数的微积分(不等式)

上场讨论了初等函数的微积分，用的是显式不等式. 现转到一般的函数，用的是$\varepsilon-\delta$, 或$\ll 1$. 它只是将不等式由显式仿效到隐式：

$$\text{可微} := \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \ll 1$$

$$\text{可积} := |\sum_{k=0}^{n}[\frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h} - f'(x_k)]\, h|$$

$$= |\sum_{k=0}^{n} f'(x_k)h - (f(b)-f(a))| \ll 1$$

后者是前者的平均. 在有限情形，后者由前者导出. 可惜，无限与有限有别，即可积公式不能由可微公式导出：后者只是表示导数存在，前者还要求这个导数是几乎处处连续.

到此，我们看到微积分是一部方法论，如何由简单（等式）仿效到复杂（不等式）、由特殊仿效到一般。特别，由最简单的原作、样本或酵母进行不断地仿效、重演或发酵，贯穿着认识的过程。但盛行的教科书反其道而行之，由一般推特殊，只有证明，看不到发明，使初学者坠入云雾。但多数教师更习惯后者。不同风格并存，条条道路通罗马。

另一面，容易理解的事（$\leqslant Ch$）变得神秘了（$\ll 1$），这就是数学家的所作所为．爱因斯坦说过，自从数学家入侵相对论以来，我就看不懂相对论了．牛顿也会说类似的话？也许这是物理学家重发明，数学家重证明？

第四场：泰勒公式—-基本公式的顶级形式

揭秘 泰勒公式是微积分的最高宝塔，实由基本公式一层一层叠起来的，只是量变！

微积分大戏的头两个角色是两张表或基本公式. 现在迎来第三角色，泰勒公式. 这是微积分的最高宝塔，登峰造极，是数学中用得最多的公式，占有主导地位.

可惜，泰勒公式过去课本盛行的证明太巧（误用分部积分积分或洛必达法则，好恐怖），尽管一遍又一遍地念，合上书还是忘．现在可跟过去的证明叫板告别，直接但反复地套用基本公式（不用分部积分，称直接法），便得泰勒公式。

既然已达高潮，该落幕了？

可惜树欲静而风不止

第五场 微分方程

接下来，最大的战役或主战场，是向”微分方程”世界进军．微分方程是牛顿以来无数科学家用来主宰世界的模型，也是中学和大学的分水岭，属于更难的算术，中学数学（代数方程）已不够用，除了大学专业中深奥的概念定理和更长的证明推导，还得求助于计算机．

这里只指出，有两个最简单又不可缺的微分方程样本，

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = f(x)$$

它们不能用基本公式解出（注意：第一场的积分公式不含$n = -1$），只能引入新函数：自然对数函数及其反函数（自然指数函数）。

微分方程有何用？这里只说一个最直白的例子：2000年大陆人口普查，挨家挨户总动员，查了一年多，由初等算术得12.66亿，又慢又费；若改用微分方程，只要一个大学生花5分钟，得13.45亿，又快又省，相差8000万（6.4%）可解释为人口流动和少报造成．此例凸显了微分方程算术的效率。

第六场： 多元微积分

山外有山，天外有天，学无止境